Analiza II*, 11. X '11
12-14, s. 4050

Uzupełnienia o funkcjach ciągłych

X = metryczna ; jeśli Y - też metryczna,
to $f: X \to Y$ jest ciągła jednost. $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon \, \exists \delta \quad \forall x, y$

$\varrho(x,y) < \delta \implies \varrho(f(x), f(y)) < \varepsilon$

<u>Tw.</u> Każda funkcja ciągła na przestrz. zwartej X jest jednost. ciągła.

⚠ pojęcie ciągłości jednost. nie przenosi się na przestrz. topologiczne.

Spójność ; obraz (przy przekszt. ciągłym) przestrzeni spójnej jest spójny ("Darboux")

(⚠ $A \subset \mathbb{R}$ jest spójny $\Leftrightarrow$ jest przedziałem)

Granica funkcji w punkcie , zbiór wszystkich granic ciągów zbieżnych $\lim_{x_n \to x_0} f(x_n)$ = zb. punktów skupienia.

<u>Przykład</u> : $f(x,y) = \frac{y}{x}$; zb. p. skupienia w $0 = (0,0)$ $= \overline{\mathbb{R}}$.

Podobnie : wsp. biegunowe na płaszczyźnie (albo sferyczne)

$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ - zamiast $\frac{y}{x}$.

<u>Uwagi</u>: 1) jak rozumieć symbol $\lim_{(x,y) \to (\infty, \infty)} f(x,y)$:

def. ciągowa : $\forall\, x_n \to \infty$
$y_n \to \infty \qquad f(x_n, y_n) \to g$

$\iff$ ε-δ :

$$\forall \varepsilon \; \exists C \quad \forall x, y :$$
$$x > C \;\&\; y > C \implies |f(x,y) - g| < \varepsilon$$

podobnie z granicami niewłaściwymi.

Analogicznie $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,c)} f(x,y)$, itd.

2) najczęściej używane uzwarcenia :

a) $\mathbb{R}^n \subset S^n$ – przez dodanie punktu w ∞

$\mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{ciągła}]{f} Y$ rozszerza się do ciągłej $S^n \to Y$

$\iff \forall\, x_\nu \in \mathbb{R}^n : \; |x_\nu| \to \infty \implies$

$f(x_\nu)$ ma granicę w Y

b) $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}P^n \overset{\text{ozn}}{=} \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \overset{\text{ozn}}{=} \mathbb{P}^n$

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} Y$ rozszerza się do ciągłej $\mathbb{P}^n \to Y$

$\iff \forall\, x_\nu \in \mathbb{R}^n : \; |x_\nu| \to \infty$

$\dfrac{x_\nu}{|x_\nu|} \to a$

$f(x_\nu)$ ma granicę w Y.

3) granice iterowane

$$X_1 \times X_2 \xrightarrow{f} Y$$

$\lim\limits_{x_1 \to a_1} \lim\limits_{x_2 \to a_2} f(x_1, x_2)$;

ciągłość względem każdej ze zmiennych.

(3)

łatwo wykazać, że jeśli $\underset{x}{\mathbb{R}^n} \times \underset{y}{\mathbb{R}} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ jest ciągła względem x $\forall y$, i monotoniczna wzgl. y $(\forall x)$, ~~to~~ jest ciągła.

Operatory liniowe ciągłe

X, Y – unormowane (więc metryczne)

łatwe: $X \xrightarrow{A} Y$ liniowy jest ciągły $\iff$

ograniczony, tzn

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty$$
$$\overset{df}{=} \|A\|$$

Obliczenie normy operatora w przypadku przestrz. euklid.:

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$, z normami euklidesowymi:

$$|Ax|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^* A x, x \rangle.$$

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{S = A^* A} \mathbb{R}^n$ jest symetr:

$$S^* = A^* A = S$$

więc w pewnej bazie ortonormalnej e_i: S jest diagonalne: $S e_j = \sum \lambda_j e_j$

$\lambda_j \geq 0$ bo S jest dodat. ≥ 0; $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$ porządek

Zatem, jeśli napisać

$$x = \sum x_j e_j,$$

to

$$|Ax|^2 = \sum_j \lambda_j x_j^2 \leq \lambda_1 \sum x_j^2 \leq \lambda_1$$

równość osiągnięta dla $x = e_1$

więc $\|A\| = \sqrt{\text{największa wartość własna } S}$. (4)

Prostsze oszacowanie: niech w jakichś bazach ortonormalnych $Ax = \sum\left(\sum a_{ij} x_j\right) e_i$,

$$\alpha = \max |a_{ij}| ;$$

wtedy

$$|Ax| \leq m\, n\, \alpha\, |x| ,$$

więc

$$\|A\| \leq m\, n\, \alpha .$$

W szczeg. każde liniowe $\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$ jest ciągłe (skądinąd oczywiste)

⚠ łatwo ud., że $\|A\|$ jest normą i jeśli $L(X,Y)$ jest przestrz. operatorów ciągłych, to jest to przestrz. Banacha $\Leftrightarrow$ Y jest przestrz. Banacha.

<u>Pojęcie pochodnej w punkcie</u>

$$X \underset{\text{otw}}{\supset} U \xrightarrow{f} Y \qquad X, Y \text{ – unormowane}$$

$$x_0 \in U$$

f jest różniczkowalne w x_0 i $f'(x_0) = A$ jeśli

lin ciągły

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$\Downarrow$

„resztą"

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + R(h)$$

gdzie $\frac{R(h)}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

czyli

$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall h$

$|h|<\delta \Rightarrow |R(h)| < \varepsilon.$

Jest to naturalne uogólnienie def. pochodnej funkcji 1 zmiennej w formie $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R(h)$.

⚠ W przestrzeniach Frécheta (np. gdzie topologia jest określona nie przez jedną normę, np. $X = C^\infty(\mathbb{R})$, $\|f\|_k = \sup_{\substack{x\in[-k,k] \\ 0\le i\le k}} |f^{(i)}(x)|$, ta definicja nie przenosi się i rach. różniczkowy przedstawia wiele trudności.

Szczególne przypadki:

1° $X = \mathbb{R}$, $\underset{\text{otocz. } x_0}{U} \xrightarrow{f} Y$. Wtedy ma sens

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = y_0$$

(bo $h\in\mathbb{R}$)

i ~~koryje~~ poprzednia def. może być wyrażona jako

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hy_0 + R(h)$$

czyli $Ah = hy_0$. (Do tej def. wystarczy tylko topologia w Y, niekoniecznie norma)

2° pochodna kierunkowa. Niech $v \in X$; określmy

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} Y$$

$$\varphi(t) = f(x_0 + tv)$$

wtedy $\varphi'(0) \overset{\text{ozn}}{=} \partial_v f(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+hv) - f(x_0)}{h}$.

Widać, że jeśli f jest różniczk. w x_0, to

$$\partial_v f(x_0) = Av;$$

w szczeg.: $v \longmapsto \partial_v f(x_0)$ jest dobrze określ. $\forall v$ i jest operatorem liniowym ciągłym.

<u>Def</u>: f jest słabo różniczk. w x_0 $\iff$ $\partial_v f(x_0)$ jest określ. $\forall v$, i jest operat. lin. ciągłym.

(Ta def. ma sens dla przestrz. liniowo topologicznych).

3° Przypadek X, Y - skończ. wymiarowych. e_i = baza w $X = \mathbb{R}^n$, E_j = baza w $Y = \mathbb{R}^m$ (niekoniecznie ortonorm.)

$$f(x) = \sum \underbrace{f_j(x)}_{\substack{\text{współrz. } f \text{ w bazie } E_j \\ = \text{ funkcje o wartościach skalarnych}}} E_j$$

$$\forall v \qquad \partial_v f(x_0) = \sum \partial_v f_j(x_0)\, E_j.$$

Jeśli f jest słabo różniczk. w x_0, to

$$\partial_v f(x_0) = \sum v_i \underbrace{\partial_{e_i} f(x_0)}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)}$$

$\overset{\text{df}}{=}$

7

wsp. x_0 w bazie e_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overset{\circ}{x}_1, \dots \overset{\circ}{x}_i + h, \dots \overset{\circ}{x}_n) - f(x_0)}{h}$$

= pochodna f rozpatr. jako funkcji zmiennej x_i, w punkcie x_0.

Zatem $A = f'(x_0)$ wyraża się wzorem:

$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ liniowe

$$A e_i = \partial_{e_i} f(x_0) = \sum \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) E_j$$

$\Leftrightarrow$

$$Av = \sum \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)\, v_i\, E_j$$

$v = \sum v_i e_i$

czyli A jest przekszt. lin. z macierzą $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)\right)$ (macierz Jacobiego).

Najprostsze własności różniczkowania

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(o ile f, g - różniczk. w x_0)

$$(cf)'(x_0) = c\, f'(x_0) \qquad c = \mathrm{const}$$

$$(\varphi f)'(x_0) = \varphi'(x_0) f(x_0) + \varphi(x_0) f'(x_0)$$

f, φ - różniczk. w x_0, φ - ma wartości skalarne

$$\left(\frac{f}{\varphi}\right)'(x_0) = \frac{\varphi(x_0) f'(x_0) - \varphi'(x_0) f(x_0)}{\varphi^2(x_0)} \qquad (\varphi(x_0) \neq 0)$$

$$(f\circ g)'(x_0) = f'(y_0) \circ g'(x_0)$$

$y_0 = g(x_0)$

(o ile f, g różniczk. w y_0 i x_0, odpow.)

⚠ 1° słaba różniczk. nie implikuje ~~różniczko~~ ciągłości, nawet w $\mathbb{R}^2$

2° $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0 \\ 0 & (x,y)=0 \end{cases}$$ i

$\partial_v f(0)$ istnieje $\forall v$, ale

$v \longmapsto \partial_v f(0)$ nie jest liniowe

3° $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4+y^2} \\ 0 \end{cases}$$

jest w 0 różniczk. w słabym sensie, ale nie jest różniczk.

4° Niech $X \supset U \xrightarrow{f} Y$, U otocz. x_0. f jest quasi-różniczk. w x_0 jeśli $\exists\ X \xrightarrow{A} Y$ lin. ciągły

$\forall$ $\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} U$ ciągła, różniczk. w 0, $\varphi(0)=0$

$f\circ\varphi$ jest różniczk. w 0

i

$(f\circ\varphi)'(0) = A\,\varphi'(0)$

Jeśli X jest skończ. wymiarowa, to każda funkcja quasi różniczk. jest różniczk.