

Uspetivacia o funkcijskoj cisljy

$X = \text{metrična}$; jedn. $Y = \text{top metrična}$,

to $f: X \rightarrow Y$ je jedn. \Leftrightarrow

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$$

$$g(x, y) < \delta \Rightarrow g(f(x), f(y)) < \epsilon$$

21. Každa funkcijska cislja na p. jedn. zvanj.

X je jedn. cislja.

▷ f je jedn. jedn. na p. jedn.

topologična.

(p. jedn. cisljy)

Spojeno: "otv. prostora" je jedn.

("Darboux")

(Δ) $A \subset \mathbb{R}$ je otv. \Leftrightarrow je jedn.

Granica funkcije na p. jedn., jedn. jedn.

granica jedn. jedn. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \text{p. jedn.}$

abstrakcija.

Praktično:

$$f(x, y) = \frac{x}{y}$$

21. p. skupa jedn. \mathbb{R}

Podobno: jedn. jedn. na p. jedn.

(jedn. jedn.)

$$\varphi = \arctan \frac{x}{y} - \text{jedn. } \frac{x}{y}$$

Uzaga: 1) je jedn. jedn. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} f(x, y)$

def. ciągła : $\forall x_n \rightarrow \infty$
 $y_n \rightarrow \infty \quad f(x_n, y_n) \rightarrow g$ (2)

$\Leftrightarrow \epsilon - \delta :$

$$\forall \epsilon \exists \delta \exists A \quad \forall x, y :$$

$$x > \delta \& y > \delta \Rightarrow |f(x, y) - g| < \epsilon$$

podobnie z granicami niewłaściwymi.

Analogicznie $\lim_{(x, y) \rightarrow (\infty, c)} f(x, y)$, itd.

2) najczęściej używane twierdzenia:

a) $\mathbb{R}^n \subset S^n$ - przez dodanie punktu w ∞

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} Y$$

ciągła

rozszerza się do ciągłej $S^n \rightarrow Y$

$$\Leftrightarrow \forall x_v \in \mathbb{R}^n : |x_v| \rightarrow \infty \Rightarrow$$

$f(x_v)$ ma granicę w Y

$$b) \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}P^n \stackrel{\text{ozn}}{=} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \stackrel{\text{ozn}}{=} \mathbb{E}^n$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} Y \text{ rozszerza się do ciągłej } \mathbb{P}^n \rightarrow Y$$

$$\Leftrightarrow \forall x_v \in \mathbb{R}^n : |x_v| \rightarrow \infty$$

$$\frac{x_v}{|x_v|} \rightarrow a$$

$f(x_v)$ ma granicę w Y .

3) granice iterowane

$$X_1 \times X_2 \xrightarrow{f} Y$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow a_1} \lim_{x_2 \rightarrow a_2} f(x_1, x_2) ;$$

ciągłość względem każdej ze zmiennych.

Katona gyakorol, azaz azt kell
 megmutatni, hogy az \$A\$ szimmetrikus
 és pozitív definit.

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

\$x, y \in \mathbb{R}^n\$, azaz \$x\$ és \$y\$ vektorok.

\$(Ax, x) \ge 0\$ minden \$x\$-re.

Operátor lineáris szimmetria

\$X, Y\$ - normált tér (normált vektortér)

Definíció: \$A\$ lineáris operátor, ha

operátor, azaz

$$\sup \|Ax\| < \infty$$

azaz

\$\|A\| < \infty\$

Operátor normájának meghatározása: az \$A\$ operátor normája az \$x\$ vektorok közötti legnagyobb normájú képlet normájának maximuma.

$$\|A\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{S^*A^*A} \mathbb{R}^n \text{ szimmetrikus}$$

$$S^* = A^*A = S$$

Ugyanúgy, mint az előzőekben, az \$S\$ pozitív definit.

$$\text{Eigenértékek: } Se_j = \lambda_j e_j$$

$$\lambda_j \ge 0$$

azaz \$S\$ pozitív definit.

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge 0$$

azaz

$$x = \sum \lambda_j e_j$$

Zárunk, tehát

$$\|Ax\|^2 = \sum \lambda_j^2 x_j^2 \leq \sum \lambda_1^2 x_j^2 = \lambda_1^2 \|x\|^2$$

azaz az \$A\$ normája az \$\lambda_1\$.

5

!verte

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + R(h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|R(h)|}{|h|} = 0$$

$$\exists \delta \exists A \text{ cgl.}$$

$$|h| < \delta \Rightarrow |R(h)| < \epsilon$$

jest naturalna ogólna def. pochodnej

funkcy. 1 zmiennej w formie $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R(h)$

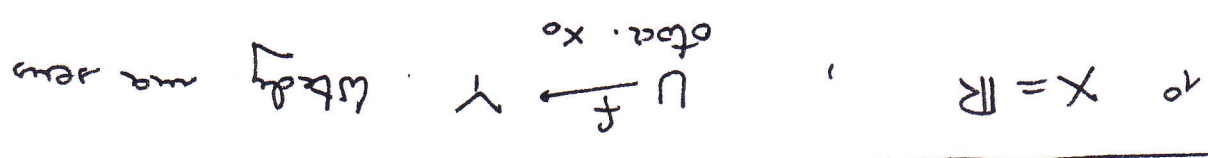
W przestrzeni Fréchet (np. gęsta topol.)

pat obrotu nie przez jedną normę, np. $X = C^0(\mathbb{R})$

$$\|f\|_k = \sup_{x \in [-k, k]} |f^{(k)}(x)|$$

nał. obliczony predykcja wiek trudności

Skrajnie punkty:



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = y_0$$

(bo $h \in \mathbb{R}$)

! Kąty poprzedz def. moze byc uogólnie

Jako

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h y_0 + R(h)$$

cgl. $Ah = h y_0$ (Do ty def. uogólny

tyko topol. w Y, nieliniowa norma)

2° podobaue kienunkawa. Nield $v \in X$;

obeklung



$$\varphi(t) = f(x_0 + tv)$$

asteky $\varphi'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{h}$

Wield, ze f pat noziewek. w x_0 , t

$$\hat{\partial} f(x_0) = Av$$

u aszeg: $v \mapsto \hat{\partial} f(x_0)$ pat doone okraf. Av

! pat operatoru Linioznu aszly.

Def: f pat doone noziewek. w $x_0 \iff \hat{\partial} f(x_0)$

pat okraf. Av , i pat operator. lin. aszly.

(Ta def. ma sens do puzn. Linioznu topologiczn.)

3° Prupadek X, Y - skalar. wzmiarowek. $e_i =$ baza w

$X = \mathbb{R}^n$, $E_j =$ baza w $Y = \mathbb{R}^m$ (wiekowieniu guesz.)

$$f(x) = \sum_j f_j(x) E_j$$

wspozn. f w bazi E_j

= funkcz o wozoznu skalarz

Av

$$\hat{\partial} f(x_0) = \sum_j \hat{\partial} f_j(x_0) E_j$$

pat: f pat doone noziewek. w x_0 , t

$$\hat{\partial} f(x_0) = \sum v_i \cdot \sqrt{e_i \cdot f(x_0)}$$

Wiem

$$\frac{df}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{df}{dx} \cdot x_0$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_0)}{h}$
 = pochodna f względem x_i w punkcie x_0 .
 Zatem $A = f'(x_0)$ wyraża m3 uśredn.:
 $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ liniowa

$Ae_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) E_j$
 $A v = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i E_j$
 $v = \sum v_i e_i$

cyle: A pat przekf. lin. z macierz $(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0))$
 (macierz Jacobiego).

Reguły różniczkowania

$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
 (o ile f, g - różnic. w x_0)

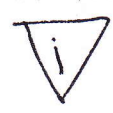
$(c f)'(x_0) = c f'(x_0)$
 $c = const$

$(\varphi f)'(x_0) = \varphi'(x_0) f(x_0) + \varphi(x_0) f'(x_0)$
 f, φ - różnic. w x_0 , $\varphi - ma wartość = 0$

$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
 $\varphi(x_0) \neq 0$

$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \circ g'(x_0)$
 $y_0 = g(x_0)$

(o ile f, g - różnic. w x_0 , odpowiednio.)



10 Alada növizik. nie implikacija. ~~nie implikacija~~ cizjasti, karzet u \mathbb{R}^2

20 $f(x,y) = \begin{cases} xy & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$

$\partial f(0)$ nstirje $A \setminus \{0\}$ ale $N \rightarrow \partial f(0)$ ni nst linear

30 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$

pat u 0 növizik. u \mathbb{R}^2 serwie, ale nie pat növizik.

40 Nred $X \supset U \xrightarrow{f} Y$. f pat quan- növizik. u x_0 pat. $\exists X \xrightarrow{A} Y$ lin. usjij

$A \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \rightarrow U$ cizja, növizik. u 0, $\varphi(0) = 0$

f o φ pat növizik. u 0

$(f \circ \varphi)'(0) = A \varphi'(0)$

jet. X pat abica. usjij, to kaida

funky quan növizik. pat növizik.