Analiza $\overline{\text{II}}^*$, 10 I '12

X = przestrzeń lokalnie zwarta, Hausdorffa, σ-zwarta (tj. suma przelicz. wielu zb. zw.)

Generowanie regularnych miar borelowskich przez zawartości:

<u>zawartość</u> : funkcja λ, określona na rodzinie zwartych, spełniająca nast. warunki:

1° $0 \leq \lambda(C) < \infty \quad \forall C$

2° monotoniczność :

$$\underset{\text{zwarte}}{C_1 \subset C_2} \Rightarrow \lambda(C_1) \leq \lambda(C_2)$$

3° podaddytywność :

$$\lambda(C_1 \cup C_2) \leq \lambda(C_1) + \lambda(C_2)$$

3° addytywność :

$$\lambda(C_1 \sqcup C_2) = \lambda(C_1) + \lambda(C_2).$$

(stąd wynika, że $\lambda(\emptyset) = 0$).

Dla zbiorów <u>otwartych</u> określamy

$$\lambda_w(U) = \sup\{\lambda(C) : \underset{\text{zwarty}}{C \subset U}\}.$$

<u>Stw</u> λ_w ma nast. własności :

1° $\lambda_w(\emptyset) = 0$

2° jest monotoniczna

3° przeliczalnie podaddytywna

4° przeliczalnie addytywna.

D. 1° , 2° – też

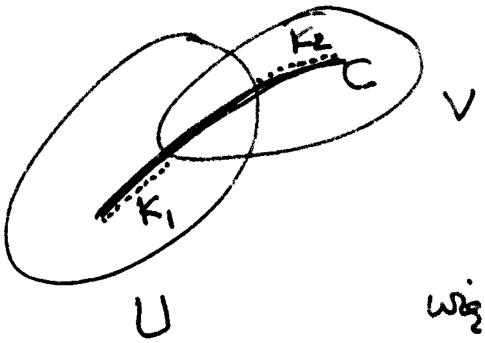
3° Najpierw skończona podaddytywność, czyli:

$$\cancel{U \subset V \Rightarrow \lambda_w(U)}$$

$$\lambda_w(U \cup V) \leq \lambda_w(U) + \lambda_w(V).$$

Niech $C \subset U \cup V$. Wtedy $\exists\, C_1 \subset U,\ C_2 \subset V$

$$C = C_1 \cup C_2$$



[$C \setminus V = K_1$, $C \setminus U = K_2$ są zwarte, rozłączne,

więc $\exists$ otwarte rozłączne Ω_1, Ω_2,

$$K_1 \subset \Omega_1, \quad K_2 \subset \Omega_2.$$

Przyjmujemy

$$C_1 = C \setminus \Omega_1, \quad C_2 = C \setminus \Omega_2 \ ].$$

Zatem

$$\lambda(C) \leq \lambda(C_1) + \lambda(C_2) \leq \lambda_w(U) + \lambda_w(V)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_w(U \cup V) = \sup_C \lambda(C) \leq \lambda_w(U) + \lambda_w(V).$$

Stąd (indukcja) $\forall n$

$$\lambda_w\Big(\bigcup_{i \leq n} U_i\Big) \leq \sum_{i \leq n} \lambda_w(U_i).$$

Teraz przeliczalna podaddytywność:

Niech $C \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$; wtedy (zwartość C)

③

$\exists\, n \quad C \subset \bigcup_{i \le n} U_i$, więc

$$\lambda(C) \le \cancel{\sum_{i\le n} \lambda_w(U_i)}\ \lambda_w\Big(\bigcup_{i\le n} U_i\Big) \le$$

$$\le \sum_{i\le n} \lambda_w(U_i) \le \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_w(U_i)$$

i wystarczy wziąć $\sup_C$.

4° Najpierw skończona <u>addytywność</u>. Niech $U \cap V = \emptyset$,

$C_1 \subset U$, $C_2 \subset V$ zwarte $\Rightarrow$ $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ $\Rightarrow$

$$\lambda_w(U\cup V) \ge \lambda(C_1 \cup C_2) = \lambda(C_1) + \lambda(C_2)$$

Biorąc $\sup_{C_1, C_2}$: $\lambda_w(U) + \lambda_w(V) \le \lambda_w(U\cup V)$

– nierówność przeciwna <u>wynika</u> z podaddytywności.

Przeliczalna addytywność : U_i – parami rozłączne.

$\forall n$

$$\lambda_w\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i\Big) \ge \lambda_w\Big(\bigcup_{i\le n} U_i\Big) = \sum_{i\le n} \lambda_w(U_i)$$

po przejściu granicznym przy $n \to \infty$

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_w(U_i) \le \lambda_w\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U\Big).$$

Dla dowolnego $A \subset X$ określamy

$$\mu_z(A) = \inf_{\substack{U \supset A \\ \text{otw}}} \{\lambda_w(U)\}.$$

<u>Stw.</u> μ_z jest miarą zewnętrzną.

D. $\mu_z(\emptyset)=0$, monotoniczność – też.

Niech A_i będą dowolne; $\varepsilon>0$. $\exists \underset{\text{otw}}{U_i} \supset A_i$

$$\mu_z(A_i) > \lambda_w(U_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

$$\mu_z\left(\bigcup A_i\right) \le \lambda_w\left(\bigcup U_i\right) \le \sum \lambda_w(U_i) <$$

$$< \sum \mu_z(A_i) + \varepsilon.$$

<u>Stw</u> Miara indukowana z μ_z via tw. Carathéodory'ego jest borelowska regularna, tzn. każdy zbiór borelowski jest mierzalny, a miara każdego zwartego jest skończona.

D. Ostatnia część jest oczywista (z lokalnej zwartości) bo każdy zwarty C ma otoczenie o zwartym domknięciu. Wystarczy więc wykazać, że każdy zwarty jest mierzalny.

<u>Lemat 1</u> 1) $\mu_z(U) = \lambda_w(U)$ $\forall U$ otwartego,

2) $\mu_z(\mathring{C}) \le \lambda(C) \le \mu_z(C)$ $\forall C$ zwartego.

D. 1) $\mu_z(U) \le \lambda_w(U)$

naodwrót: niech $U \subset V$; $\lambda_w(V) \ge \lambda_w(U)$

więc $\inf\limits_{V\supset U} \lambda_w(V) \ge \lambda_w(U)$.

2) niech $\underset{\text{zw.}}{C} \subset \underset{\text{otw}}{U}$; wtedy

$$\lambda(C) \leq \lambda_w(U)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda(C) \leq \inf_{U \supset C} \lambda_w(U) = \mu_z(C)$$

Jeśli za U w 1) przyjmiemy $\mathring{C}$, to

$$\mu_z(\mathring{C}) = \lambda_w(\mathring{C}) \underset{\text{przypomnienie}}{=} \sup_{C_1 \subset \mathring{C}} \lambda(C_1)$$

$$\leq \lambda(C).$$

<u>Lemat 2</u> Zbiór $A \subset X$ jest mierzalny $\Leftrightarrow$
$\forall U$ otw.

$$\mu_z(U) \geq \mu_z(U \cap A) + \mu_z(U \setminus A).$$

(czyli warunek Carathéodory'ego ma być spełniony tylko dla zb. otwartych)

D. $\Rightarrow$ oczywiste

$\Leftarrow$ Weźmy dowolny Z : $Z \subset U$.

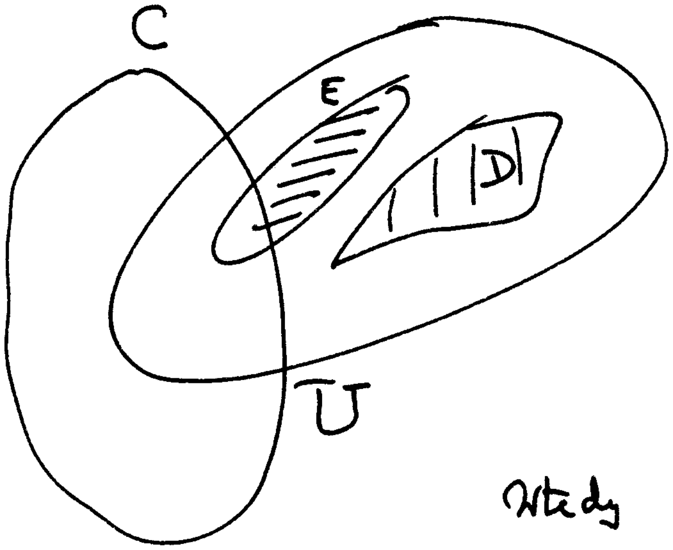
$$\lambda_w(U) \underset{\text{Lemat 1}}{=} \mu_z(U) \underset{\substack{\text{zakł., że} \\ \text{jest spełn.} \\ \text{ta nierówność} \\ \text{(jak w tezie} \\ \text{lematu)}}}{\geq} \mu_z(U \cap A) + \mu_z(U \setminus A)$$

$$\geq \mu_z(Z \cap A) + \mu_z(Z \setminus A)$$

Biorąc $\inf\limits_{U \supset Z}$ otrzymamy war. Caratheodory'ego dla Z.

Ciąg dalszy dowodu stw.: trzeba wykazać, że $\forall U$

$$\mu_Z(U) \geq \mu_Z(U \cap C) + \mu_Z(U \setminus C).$$



Weźmy dowolny zwarty $D \subset U \setminus C$ i niech $E \subset U \setminus D$ zwarty.

Wtedy

$$\mu_Z(U) = \lambda_w(U) \geq \lambda(E \sqcup D) =$$

$$= \lambda(E) + \lambda(D)$$

$$\Rightarrow \mu_Z(U) \geq \lambda(D) + \sup_{E \subset U \setminus D} \lambda(E) =$$

$$= \lambda(D) + \lambda_w(U \setminus D) = \lambda(D) + \mu_Z(U \setminus D) \geq$$

$$\geq \lambda(D) + \mu_Z(U \cap C).$$

$$\Rightarrow \mu_Z(U) \geq \sup_D \lambda(D) + \mu_Z(U \cap C) =$$

$$= \underset{\mu_Z(U \setminus C)}{\underset{\shortparallel}{\lambda_w(U \setminus C)}} + \mu_Z(U \cap C),$$

cbdo.

Def λ jest regularna, jeśli $\forall$ zwartego C

$$\lambda(C) = \inf_{\substack{D:\ C \subset \mathring{D} \\ \text{zw.}}} \lambda(D).$$

Stw $\mu(C) = \lambda(C)$ dla C zwartych, o ile λ jest regularna (przyp.: μ = miara powstała z μ_z).

D. Jeśli $\varepsilon > 0$ jest dowolne, to $\exists\, D$ zw., $C \subset \mathring{D}$

$$\lambda(C) \geq \lambda(D) - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \lambda(C) \leq \mu_z(C) \leq \mu_z(\mathring{D}) = \lambda_w(\mathring{D}) \leq$$

$$\leq \lambda(D) \leq \lambda(C) + \varepsilon.$$

⚠ Łatwo się dowodzi, że jeśli μ jest regularną miarą borelowską, ~~ta~~ to $\lambda(C) \stackrel{df}{=} \mu(C)$ jest regularną zawartością, i μ pokrywa się z miarą uzyskaną z λ jak poprzednio.

⚠ Niech $X \xrightarrow{f} X$ będzie homeomorfizmem. Jeśli λ jest niezmiennicza względem f (tzn $\lambda(f(C)) = \lambda(C)$ $\forall C$ zwartego), to μ również jest niezmiennicza.

Miara Haara G = grupa topologiczna lokalnie zwarta i (dla uproszczenia) σ-zwarta. Działanie grupowe $x, y \longmapsto xy^{-1}$ jest (z definicji) ciągłe.

Niech $L_x : G \longrightarrow G$, $L_x(y) = xy$. Analogicznie $R_x(y) = yx$. Miara nazywa się lewostronnie (prawostr.) niezmiennicza jeśli $\forall$ A mierzalnego $L_x A \stackrel{df}{=} xA$ jest mierzalny (Ax jest mierzalny) i $\mu(L_x A) = \mu(A)$ ($\mu(R_x A) = \mu(A)$)

Tw Na każdej grupie jak wyżej istnieje niezerowa lewostronna regularna miara Haara borelowska (tj wszystkie zb. borelowskie są mierzalne)

⚠ 1) Taka miara jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do stałej multyplikatywnej (dowód będzie później)

2) Analogicznie istnieje prawostronnie niezmiennicza miara Haara i miara prawostr. niezmiennicza nie zawsze jest lewostronnie niezmiennicza, ale tak jest dla grup przemiennych (oczywiste) i zwartych (Trudne).

3) Dla $(\mathbb{R}^n, +)$ miarą Haara jest miara Lebesgue'a

4) Trywialny przykład miary niezmienniczej (dla dowolnej grupy): $\mu(A) = \begin{cases} \overline{\overline{A}} & \text{gdy A skończ.} \\ \infty & \text{" A nieskończ.} \end{cases}$

Oczywiście gdy G jest skończona, to każda miara niezmiennicza jest proporcjonalna do tej.

5) Miara Haara spełnia warunek: $\mu(U) > 0$ dla dowolnego $U \neq \emptyset$ otwartego. Bo gdyby $\mu(U) = 0$ dla jakiegoś U, to - przesuwając U - można by

dodatkowo założyć, że U jest otoczeniem e. Jeśli C jest zwarty, to istnieje skończone pokrycie C zbiorami postaci $x_i U$; zatem $\mu(C)=0$ i z σ-przeliczalności $\mu(G)=0$.

Dowód tw. Dla dowolnego otoczenia $U \ni e$ i dowolnego zwartego C niech

$$C:U = \min\{n : \exists\, x_1,\dots,x_n \in G \quad C \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i U\}.$$

Wybierzmy dowolnie otoczenie $A \ni e$, $\bar{A}$ zwarte, i niech

$$\lambda_U(C) = \frac{C:U}{A:U}$$

← czynnik normalizacyjny.

Oczywiste własności funkcji λ_U:

$0 \le \lambda_U < \infty$, nawet $\forall C \quad \lambda_U(C) \le C:A$,

bo $C:U \le (C:A)\cdot(A:U)$

monotoniczność

podaddytywność

lewostr. niezmienniczość

Zamiast addytywności jest słabsza własność:

jeśli $C_1U^{-1} \cap C_2U^{-1} = \emptyset$, to

$$\lambda_U(C_1 \cup C_2) = \lambda_U(C_1) + \lambda_U(C_2)$$

[$C_1U^{-1} = \{xu^{-1} : x \in C_1,\ u \in U\}$ = otoczenie C_1; więc założenie jest dużo mocniejsze niż rozłączność zbiorów C_1, C_2. Jeśli na G jest metryka, to to założenie jest równoważne warunkowi, że zbiory C_1, C_2 są w dodatniej odległości].

Bo $\forall x \quad xU \cap C_1 \neq \emptyset \Rightarrow xU \cap C_2 = 0$

[gdyby $xU \cap C_1 \neq \emptyset$ & $xU \cap C_2 \neq \emptyset$, to

dla pewnych $c_1, c_2 \quad (c_i \in C_i)$

$$x u_1 = c_1 \quad \& \quad x u_2 = c_2$$

$$u_1 \in U \qquad u_2 \in U$$

$$\Rightarrow x = c_1 u_1^{-1} = c_2 u_2^{-1}$$

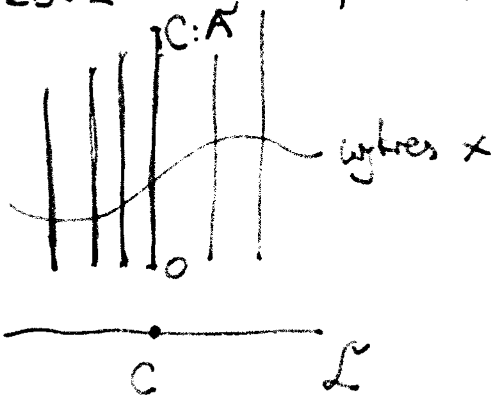
$$\Rightarrow x \in C_1 U^{-1} \cap C_2 U^{-1} \;].$$

Zatem każde pokrycie $C_1 \cup C_2$ zbiorami postaci $x_i U$ składa się z dwóch rozłącznych pokryć C_1 i C_2 takimi zbiorami.

Niech $\mathcal{K}$ będzie rodziną wszystkich otoczeń e i tworzymy produkt

$$\mathfrak{X} = \prod_{C = \text{zwarte}} [0, C:A]$$

z topologią Tichonowa. $\mathfrak{X}$ jest zwarta. Punkty $\mathfrak{X}$ są to funkcje x, określone na rodzinie wszystkich zb. zwartych $\mathcal{L}$, $x(C) \in [0, C:A] \subset \mathbb{R}$



Baza otoczeń $x \in \mathfrak{X}$: wyznaczona przez skończ. liczbę $C_i \in \mathcal{L}$, $i = 1, \ldots, N$ i liczbę ε:

$$\mathcal{U}_{C_1 \ldots C_N, \varepsilon, x} = \{ y \in \mathfrak{X} : |y(C_i) - x(C_i)| < \varepsilon \ \forall i \}.$$

otoczenie x

W szczególności odwzorowanie "ewaluacji w $C \in \mathcal{L}$"

$$ev_C : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x(C)$$

jest ciągłe (bo na $\mathcal{U}_{C,\varepsilon,x}$ $|ev_C(y) - e_{v_C}(x)| < \varepsilon$).

Dla dowolnego $U \in \mathcal{N}$ $\lambda_U \in \mathfrak{X}$; niech

$$\Lambda(U) = \{\lambda_V : V \subset U\}.$$

Rodzina tych zbiorów ma własność:

każde skończone przecięcie $\bigcap_{i \leq k} \Lambda(U_i)$ jest niepuste:

$$\text{bo } \bigcap \Lambda(U_i) \supset \Lambda(\overbrace{\bigcap U_i}^{\in \mathcal{N}}) \neq \emptyset$$

Tym bardziej domknięcia $\overline{\Lambda(U)}$ mają tę samą własność. Ze zwartości $\mathfrak{X}$ wynika, że $\bigcap_{U \in \mathcal{N}} \overline{\Lambda(U)} \neq \emptyset$.

Niech $\lambda \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}} \overline{\Lambda(U)}$; wykażemy, że jest to niezerowa niezmiennicza (lewostr.) zawartość, co zakończy dowód.

– $\forall_C$ $\lambda(C) \in [0, C : A]$ – bo wszystkie elementy każdego $\Lambda(U)$ mają tę własność

– monotoniczność λ: niech $C_1 \subset C_2$. Z ciągłości ev_{C_1} i ev_{C_2}

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathfrak{X} : ev_{C_1}(x) \leq ev_{C_2}(x)\}$$

jest domknięty, oraz każda $\lambda_U \in \mathcal{F}$; zatem $\lambda \in \mathcal{F}$.

- podaddytywność : $\lambda(C_1 \cup C_2) \le \lambda(C_1) + \lambda(C_2)$

  - dowód identyczny

- addytywność : Niech $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $C_1, C_2 \in \mathcal{L}$. Wtedy dla dostatecznie małego $U \in \mathcal{N}$

$$C_1 U^{-1} \cap C_2 U^{-1} = \emptyset,$$

więc

$$\lambda_U(C_1 \cup C_2) = \lambda_U(C_1) + \lambda_U(C_2)$$

i tak samo jest dla wszystkich $V \subset U$.

Jeśli teraz $\mathcal{F} = \{x : ev_{C_1 \cup C_2}(x) = ev_{C_1}(x) + ev_{C_2}(x)\}$

to $\mathcal{F}$ jest domknięty i $\Lambda(U) \subset \mathcal{F}$. Zatem $\lambda \in \mathcal{F}$.

- $\lambda(A) = 1$ (więc $\lambda \neq 0$). Bo ~~ta~~ $\lambda_U(A) = 1$ $\forall U$, więc każde $\Lambda(U) \subset \underbrace{\{x : ev_A(x) = 1\}}_{\text{domknięty}}$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ \lambda(A)}}{ev_A(\lambda)} = 1.$$

⚠ Istnieje dowód istnienia <u>miary</u> Haara nie wykorzystujący pewnika wyboru dla nieprzeliczalnych rodzin zbiorów [Hewitt-Ross: Abstract Harmonic Analysis].