Analiza $\underline{\mathrm{II}}^*$, 9 XII. '11

Uzupełnienie do dowodu tw. przygotowawczego

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_x / (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) < \infty \implies \mathcal{O}_x \text{ jest skończenie generowany nad } \mathcal{O}_y.$$

(było)

Teraz wykażemy, że jeśli $[e_i]$ $(e_i \in \mathcal{O}_x)$ generują $\mathcal{O}_x / (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, to te same e_i generują $\mathcal{O}_x$ nad $\mathcal{O}_y$.

Bo niech $N \subset \mathcal{O}_x$ będzie zbiorem wszystkich kiełków postaci ~~Σ λi(f~~ $\sum \lambda_i(\varphi(x))\, e_i(x)$ $(\lambda_i \in \mathcal{O}_y)$ (czyli $N = \sum \mathcal{O}_y e_i$) ; jest to podmoduł $\mathcal{O}_x$, a $\mathcal{O}_x$ jest skończ. generowanym ~~ją~~ modułem nad $\mathcal{O}_y$. Oczywiście

$$\mathcal{O}_x = N + \underbrace{m_y \mathcal{O}_x}_{\text{to samo co } (\varphi_1, \ldots \varphi_m)}$$

(wystarczy przejść do ~~postaci~~ modułów ilorazowych, dzieląc obie strony przez ideał $(\varphi_1, \ldots \varphi_m)$). Teraz wystarczy skorzystać z lematu Nakayamy.

⚠ TFO jest oczywistym wnioskiem z tej wersji tw. przygotowawczego :

niech $\mathbb{R}^n_x \xrightarrow{\varphi \in \mathcal{O}} \mathbb{R}^n_y$; $0 \longrightarrow 0$; jeśli $J_\varphi(0) \neq 0$, to jeśli φ_i^0 są częściami liniowymi φ_i, to $\exists \lambda_{ij} \in \mathbb{R}$

$$x_i = \sum \lambda_{ij} \varphi_i^0 .$$

Zatem

$$x_i = \sum \lambda_{ij} \varphi_i \mod \mathfrak{m}_x^2 ,$$

więc

$$\mathfrak{m}_x = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) + \mathfrak{m}_x^2 .$$

$\mathfrak{m}_x$ jest skończ. generowany (przez wszystkie x_i) jako $\mathcal{O}_x$-moduł, więc z lematu Nakayamy

$$\mathfrak{m}_x = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) .$$

Zatem, ~~skoro~~ $\mathcal{O}_x / (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ jest generowana (nad $\mathbb{R}$) przez 1, więc $\forall i$

$$x_i = \psi_i(\varphi(x)) \quad \text{dla pewnych } \psi_i \in \mathcal{O}_y .$$

Zatem $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ jest przekształceniem odwrotnym do φ.

<u>Twierdzenie Sarda</u>: Niech $\mathbb{R}^n_x \supset U \xrightarrow{f \,\in C^1} \mathbb{R}^m_y$.

Punkt krytyczny: każdy taki $x \in U$, że $\operatorname{rank} f'_x < m$ (w szczególności każdy punkt $x \in U$ jest krytyczny gdy $m > n$). Pozostałe punkty nazywają się regularne.

Wartość krytyczna: obraz jakiegoś punktu krytycznego. Pozostałe punkty $\mathbb{R}^m_y$: wartości regularne (⚠ wartość regularna nie musi być wartością f).

Np. gdy $m > n$, zbiorem wartości krytycznych f jest $f(U)$.

Przykład: $\mathbb{R} \xrightarrow{P} \mathbb{R}$, $P = x^n + \dots$
wielomian stopnia n
unormowany ← ogólny przypadek łatwo się sprowadza do tego

Wartość krytyczna y taki punkt, że wielomian $x \mapsto P(x) - y$ ma pierwiastek wielokrotny rzeczywisty. Gdyby zamienić $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$, to y krytyczne $\Leftrightarrow$ wyróżnik $\Delta(y)$ tego wielomianu jest $= 0$ (istnieje jawny wzór na wielomian Δ).

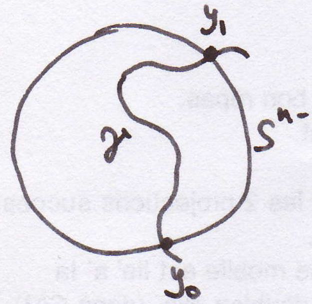
Tw. Sarda Jeśli $f \in C^N$, $N > \max(n-m, 0)$, to zbiór wartości krytycznych jest miary 0. Tak samo dla odwzorowań między rozmaitościami (oczywiście klasy C^N)

Dowód będzie później

⚠ Niech y będzie wartością regularną. Wtedy $f^{-1}(y)$ jest zadany równaniem (właściwie: układem równań) $f(x) = y$, i do tego równania stosuje TFU (z def. wartości regularnej), jeśli zb. rozwiązań jest niepusty. $f^{-1}(y)$ jest więc albo $\emptyset$, albo jest podrozmaitością, klasy C^N kowymiaru m, domkniętą w U,

Wniosek (tw. Brouwera): $B^n \xrightarrow{r} S^{n-1}$ C^∞ retrakcja nie istnieje (tzn określona na otoczeniu B^n)

D. niech $y_0 \in S^{n-1}$ — wartość regularna; $\gamma \subset r^{-1}(y_0)$ składowa spójna, zawierająca y_0 = krzywa gładka, przecinająca S^{n-1} w y_0 i nie-styczna w y_0 do S^{n-1}. Parametryzując γ np. długością łuku łatwo widać, że



γ musi przeciąć S^{n-1} w jeszcze jednym punkcie $y_1 \in S^{n-1}$, skąd $r(y_1) = r(y_0)$ (sprzeczność).

Funkcje Morse'a $U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ jest Morse'a, jeśli w każdym jej punkcie krytycznym x_0, jej hessian $\det \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \neq 0$.

Wniosek: Każdą $f \in C^\infty$ można aproksymować (w topologii C^∞ na zb. zwartych) funkcjami Morse'a (tzn. $\exists f_\nu \to f$, zbieżny niemal jednostajnie, Morse'a, wraz ze wszystkim pochodnymi).

Dowód: Rozpatrzmy $g_\lambda(x) = f(x) - \sum \lambda_i x_i$
parametry.

Niech $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ będzie wartością regularną odwzorowania

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

dowolnie bliską 0 (zb. wartości regularnych jest gęsty)

Zatem: jeśli $Df(x) = \lambda$, to $(Df)'\big|_x : T_x\mathbb{R}^n \to T_{Df(x)}\mathbb{R}^n$ jest izomorfizmem. Hessian = wyznacznik $(Df)'\big|_x$.

Ale $Df(x) = \lambda \iff Dg(x) = 0$; hessian g w x = hessian f w x, co kończy dowód. 5

⚠ Łatwo dowodzi się (imitując sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej), że każda funkcja Morse'a w otoczeniu swojego punktu krytycznego ma w odpowiednich współrzędnych postać

$$f(x) = \mathrm{const} - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2 .$$

(λ może być $= 0$ lub n).

Przekształcenia Whitney'a $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (kiełki)

Każde $\mathbb{R}^2_x \xrightarrow{f \in C^\infty} \mathbb{R}^2_y$ (może być podzb. otwarty) można aproksymować (w sensie jak wyżej) takimi g, że $\operatorname{rank} g'\big|_x \geq 1$ $\forall x$.

Bo napiszmy $f = (f_1, f_2)$ i niech

$$\Phi : \mathbb{R}^2_x \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\Phi = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right).$$

Obraz ma miarę 0 (Sard); niech $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ leży poza tym obrazem. Wtedy

$$g = (f_1 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 ,\ f_2 - \lambda_3 x_1 - \lambda_4 x_2)$$

spełnia ~~w~~ warunek : $\operatorname{rank} g'|_x \geq 1 \quad \forall x$.

Niech więc $\operatorname{rank} f' \geq 1$ wszędzie. Jeśli ~~rk f'~~ $\operatorname{rank} f'(x_0) = 2$, to w lok. współrzędnych f ma postać

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = x_2 .$$

Załóżmy więc, że $\operatorname{rank} f'(x_0) = 1$. Wtedy, po spermutowaniu ew. współrzędnych, można założyć, że dowolny $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$, a więc, w odpowiednich współrzędnych, $f_1 = x_1$. Ostatecznie, zmieniając nieco notację, nasze przekszt. $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ w otoczeniu x_0 ~~= 0~~, jest postaci

$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, f(x_1, x_2)).$$

<u>Lemat</u>: f można aproksymować (w sensie jak wyżej) takimi g, że

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \ \& \ \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = 0 \implies \frac{\partial^3 g}{\partial x_2^3} \neq 0 \ \& \ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \neq 0 .$$

D. Rozpatrujemy znowu parametry $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ i niech

$$g(x) = f(x) - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1 x_2 - \lambda_3 x_2^2 - \lambda_4 x_2^3 .$$

Wtedy

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda_1 - \lambda_2 x_1 - 2\lambda_3 x_2 - 3\lambda_4 x_2^2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - 2\lambda_3 - 6\lambda_4 x_2 ,$$

$$\frac{\partial^3 g}{\partial x_2^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3} - 6\lambda_4 \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \lambda_2 .$$

Za $6\lambda_4$ i λ_2 weźmy odpowiednio wartość regularną $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}$ lub $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$. ~~Wtedy każ~~

$$C_1 = \left\{ \frac{\partial^3 g}{\partial x_2^3} = 0 \right\}$$ jest gładką krzywą

i $$C_2 = \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \right\}$$ również.

Teraz za $2\lambda_3$ weźmy wartość regularną

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - 6\lambda_4 x_2 \Big|_{C_1 \cup C_2}$$

a za λ_1 – wartość regularną

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda_2 x_1 - 2\lambda_3 x_2 - 3\lambda_4 x_2^2 \Big|_{C_1 \cup C_2} .$$

Wtedy $\frac{\partial g}{\partial x_2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}$ mogą mieć na $C_1 \cup C_2$ co najwyżej skończoną liczbę wspólnych zer, a ponieważ te zera zależą nietrywialnie od λ_3 i λ_1, więc odpowiednio dobierając λ_3, λ_1 (które mogą być dowolnie blisko 0) można uzyskać brak wspólnych zer.

Postacie kanoniczne:

1) jeśli $\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_0 = 0$ (w $x_0 = 0$), $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\Big|_0 \neq 0$, to w odpowiedniej

współrzędnych (x_1, f) ma postać (x_1, x_2^2).

D.: Stosujemy tw. przygotowawcze do $\varphi_1(x) = x_1$, $\varphi_2(x) = f(x)$. $\mathcal{O}_x / (\varphi_1, \varphi_2)$ jest generowana nad $\mathbb{R}$ przez $1, x_2$, więc

$$x_2^2 = \lambda(x_1, f) + 2\mu(x_1, f)x_2, \quad \lambda, \mu \in \mathcal{O}$$
$$\lambda(0) = 0, \quad \mu(0) = 0$$

Niech $x_2' = x_2 - \mu(x_1, f)$, $y_2' = \lambda(y_1, y_2) + \mu^2(y_1, y_2)$

Wtedy, dla $x_1' = x_1$, $y_1' = y_1$, uzyskujemy lok. współrzędne (x_1', x_2'), (y_1', y_2'), i w nich

(x_1, f) pisze się jako $\quad y_1' = x_1'$
$\qquad y_2' = x_2'^2$

2) jeśli w 0: $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ i

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3} \neq 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \neq 0,$$

~~to~~ w odpowiednich współrzędnych (x_1, f) pisze się jako

$$y_1' = x_1', \quad y_2' = -x_1'x_2' + x_2'^3.$$

D. $\varphi_1(x) = x_1$, $\varphi_2(x) = f(x)$ jak poprzednio. Teraz $\mathcal{O}_x / (\varphi_1, \varphi_2)$ jest generowane nad $\mathbb{R}$ przez $1, x_2, x_2^2$, więc $\exists\, \lambda, \mu, \varkappa \in \mathcal{O}$

$$x_2^3 = \lambda(x_1, f) + \mu(x_1, f)x_2 + 3\varkappa(x_1, f)x_2^2$$

Zastępując x_2 przez $x_2 - \varkappa(x_1, f)$ uzyskamy nowe wsp. (x_1, x_2) (dla uproszczenia nie zmieniamy notacji), w których

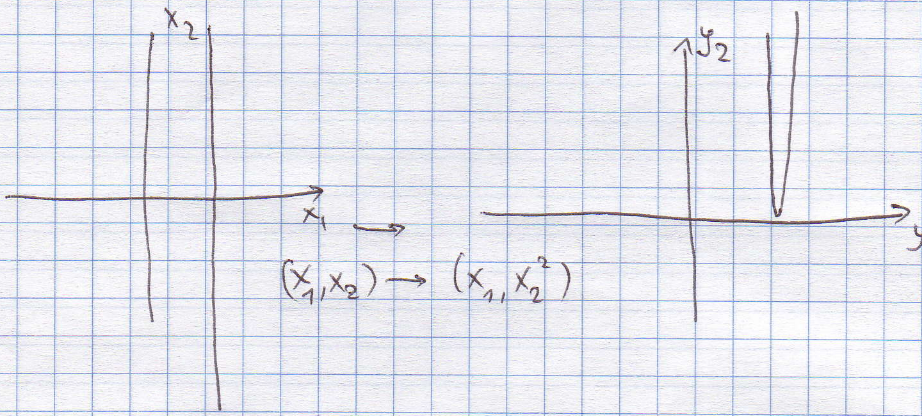
$$x_2^3 = \lambda(x_1, f) + \mu(x_1, f)\, x_2 .$$

Niech $x_1' = \mu(x_1, f)$, $x_2' = x_2$,

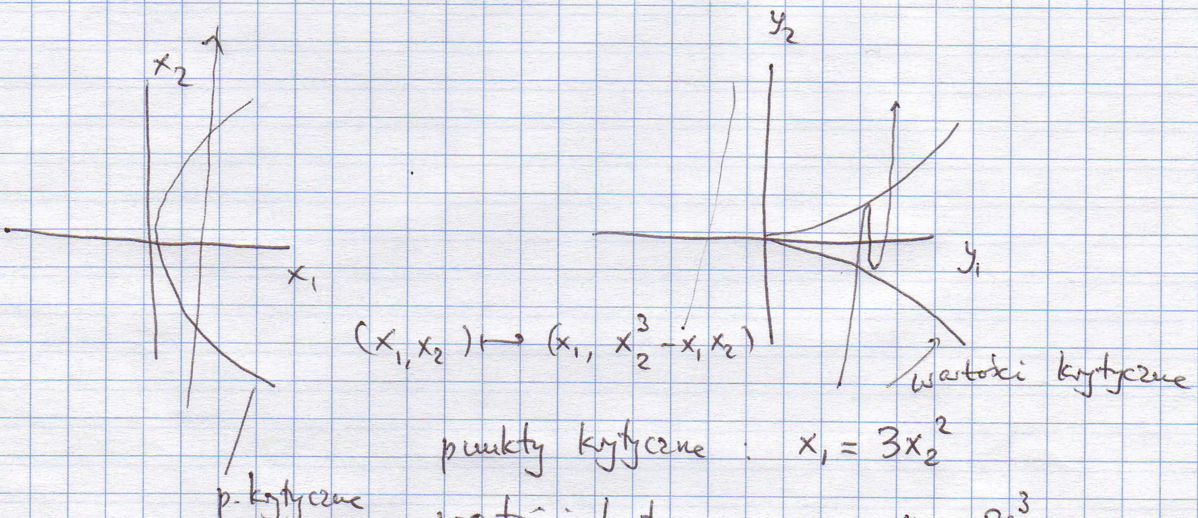
$y_1' = \mu(y_1, y_2)$, $y_2' = \lambda(y_1, y_2)$.

W tych współrzędnych postać przekształcenia jest jak wyżej.

(ćw.: wykazać, że $\cancel{\frac{\partial \mu}{\partial x_1}}$ $\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu(x_1, f)\right)\right|_0 \neq 0$, żeby wsp. x_1', x_2' były dobrze określone)



$(x_1, x_2) \longrightarrow (x_1, x_2^2)$



$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, x_2^3 - x_1 x_2)$

punkty krytyczne: $x_1 = 3x_2^2$

wartości krytyczne: $y_2 = -2x_2^3$, $y_1 = 3x_2^2$ $\Rightarrow$

$$y_2^2 = \frac{4}{27} y_1^3$$