Analiza $\overline{\mathrm{II}}^*$, 6.XII.'11.

Uzupełnienia o tw. przygotowawczym w wersji Weierstrassa

$$P(x) = x_n^p + \sum_{0\le i<p} a_i(x')x_n^i, \quad a_i(0)=0, \quad a_i \in \mathcal{O}_{x'}$$

1) Rozkład
$$f(x) = Q(x)P(x) + R(x), \quad f\in\mathcal{O}_x,$$
$$R(x) = \sum_{i<p} b_i(x)x_n^i$$

jest jednoznaczny (w klasie f. analitycznych, tj. $Q, R \in \mathcal{O}$)

jeśli $f = \tilde{Q}P + \tilde{R}$, $\tilde{R}$ - jak wyżej, to $\tilde{Q}=Q$, $\tilde{R}=R$.

Bo jeśli $F=\tilde{Q}-Q$, $S=\tilde{R}-R$ = wielomian stopnia $<p$ względem x_n

to

$$FP+S=0.$$

Dla x' bliskich 0 P ma p pierwiastków x_n (liczonych z krotnościami). Bo tak jest dla $x'=0$, i wystarczy skorzystać z następującego faktu:

pierwiastki (zespolone) wielomianu unormowanego

$$t^p + \sum_{i<p} a_i t^i$$

są funkcjami hölderowskimi z wykładnikiem $1/p$ w dziedzinie, gdzie $|a_i|$ są ograniczone: $|a_i|\le C_i$.

[to trzeba rozumieć tak: niech

$$F_a(t) = t^p + \sum \underset{\text{zmienne}}{a_i}\, t^i .$$

niech $t_1, \dots, t_p$ = wszystkie pierwiastki F_a wypisane razem z krotnościami w dowolnej kolejności. ~~tak~~ Podobnie niech

$$F_b(t) = t^p + \sum b_i t^i, \quad t'_1, \dots, t'_p \text{ - jego}$$

pierwiastki. Niech $\underset{\max_i |a_i|}{|a|}, \underset{\max_i |b_i|}{|b|} \le C$

wtedy $\forall t'_i \; \exists t_j \quad |t'_i - t_j| \le \underset{\text{const}}{M}\, |a-b|^{1/p}$

D. $F_a(t) = \prod (t - t_i), \quad F_b(t) = \prod (t - t'_i).$

$$|F_a(t'_i)| = \Big|\prod_j (t'_i - t_j)\Big|$$

$$|F_a(t'_i) - F_b(t'_i)| \le$$

$$\le p\,|a-b| \sum_{j<p} |t'_i|^j$$

oczywiste ograniczenie $|t'_i|$: niech $T = t'_i$, wtedy

$$T^p = -\sum_{j<p} b_j T^j$$

Jeśli $\tau = \max(1, |T|)$, to

$|\text{prawa strona}| \leq pC\tau^{p-1}$, więc

$$|T|^p \leq \tau^p \leq pC\tau^{p-1} \Rightarrow \tau \leq pC$$

$$\Rightarrow |T| \leq \max(1, pC), \text{ więc}$$

$$|t_i'| \leq \max(pC, 1).$$

Ostatecznie

$$|F_a(t_i')| \leq C_1 |a-b|$$

C_1 zależy tylko od p i C.

więc

$$\prod_j |t_i' - t_j| \leq C_1 |a-b|$$

$$\Rightarrow \exists j \quad |t_i' - t_j| \leq \sqrt[p]{C_1 |a-b|}\,\Big].$$

Teraz F, P, S rozszerzamy do dziedziny zespolonej. Podstawiając za x_n pierwiastki P uzyskamy, że S ma p pierwiastków, ~~wbrew temu, że S jest wielomianem~~ więc $S \equiv 0$.

2) Niech $f \in \mathcal{O}_x$, $f(0, x_n) \sim x_n^p$ (czyli:

$$\frac{\partial^i f}{\partial x_n^i}(0) = 0 \quad (i < p), \qquad \frac{\partial^p f}{\partial x_n^p}(0) \neq 0.$$

Wtedy

$$f = QP$$

dla pewnego P stopnia p względem x_n, i z konieczności $Q(0) \neq 0$.

Dowód: Niech $a = (a_0, \dots, a_{p-1})$ = zmienne i

$$P_a(x_n) = x_n^p + \sum_{i<p} a_i x_n^i. \text{ Wtedy}$$

$P(a, x_n)$ ″

$$f(x) = q(x, a)\, P(a, x_n) + \sum_{i<p} A_i(x', a)\, x_n^i.$$

Oczywiście

$$A_i(0,0) = 0 \quad \forall i, \quad q(0,0) \neq 0$$

Różniczkujemy powyższą tożsamość względem a_j i podstawiamy $x' = 0$, $a = 0$:

$$0 = \frac{\partial q}{\partial a_j} P + q x_n^j + \sum_{i<p} \frac{\partial A_i}{\partial a_j} x_n^i$$

Stąd

$$q(0) + \frac{\partial A_j}{\partial a_j}(0,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial A_j}{\partial a_j}\right|_0 \neq 0$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial a_j} = 0 \quad \text{dla } i \neq j.$$

Zatem $\det\left(\frac{\partial A_j}{\partial a_i}\right)(0,0) \neq 0$ i stosujemy TFU do układu równań

$$A_i(x', a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = a(x').$$

Za szukany P bierzemy $x_n^p + \sum a_i(x') x_n^i$.

Twierdzenie o funkcjach symetrycznych:

$$\sigma_i(x) : \quad \sigma_1 = x_1 + \cdots$$
$$\sigma_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$$

stąd

$$\prod (T + x_i) = T^p + \sum_{i<p} \sigma_{p-i}(x)\, T^i$$

Tw Jeśli $f \in \mathcal{O}_x$ jest symetryczny, to $\exists g \in \mathcal{O}_x$

$$f = g(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$$

D. $\varphi(x) = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_p(x))$, $x \in \mathbb{R}^p_x$.

czyli $\varphi: y_1 = \sigma_1(x), \dots, y_p = \sigma_p(x)$.

φ^* jest quasi-skończone:

jeśli za T podstawić $-x_j$ w definicji $\sigma_i(x)$, to

$$0 = \pm x_j^p + \sum_i \pm \sigma_{p-i}(x) x_j^i$$

więc x^α $(|\alpha| < p)$ generują $\mathcal{O}_x / (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$

Zatem generują również $\mathcal{O}_x$ nad $\mathcal{O}_y$: każde $f(x) \in \mathcal{O}_x$ pisze się jako

$$f(x) = \sum_{|\alpha| < p} \psi_\alpha(\sigma(x)) x^\alpha .$$

Jeśli $f(x)$ jest symetryczne, to uśredniamy po permutacjach $x_1, \dots, x_p$ i korzystamy z tw. o wielomianach symetrycznych.