TFU :

$$(x_0,y_0) \in \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n_x}}{\overset{}{U}}{}_{\text{otw}} \times \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^m_y}}{V}{}_{\text{otw}} \xrightarrow{F\in C^1} \mathbb{R}^m \quad , \quad F(x_0,y_0)=0$$

Jeśli
$$T_{y_0}\mathbb{R}^m_y \xrightarrow{D_yF(x_0,y_0)} T_{F(x_0,y_0)}\mathbb{R}^m = T_0\mathbb{R}^m$$

[przyp.: $D_yF(x_0,y_0)$ jest to pochodna przekszt. $y \longmapsto F(x_0,y)$ w $y=y_0$]

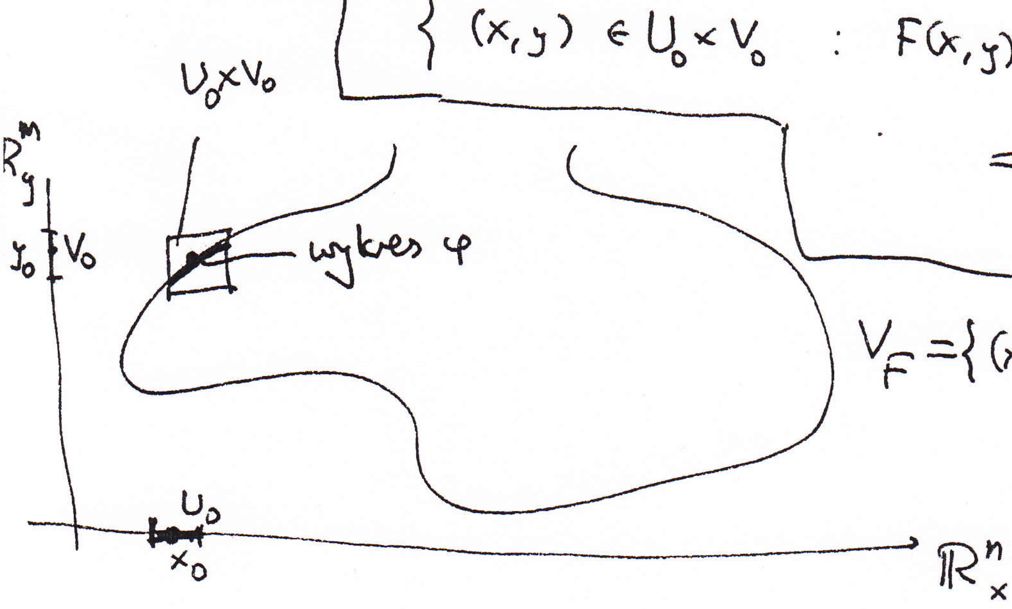
jest odwracalna, to istnieją:

1° otoczenia $x_0 \in U_0 \subset U$
$y_0 \in V_0 \subset V$

2° przekształcenie
$$U_0 \xrightarrow{\varphi\in C^1} V_0 \quad , \quad \varphi(x_0)=y_0$$

takie, że

$\{(x,y)\in U_0\times V_0 \ : \ F(x,y)=0\} = \underline{\text{wykres}}\ \varphi =$
$= \{(x,y)\in U_0\times V_0 \ : \ y=\varphi(x)\}$.



$V_F = \{(x,y) : F(x,y)=0\}$

TFO: $\mathbb{R}^n_x \supset U \xrightarrow{f \in C^1} \mathbb{R}^n_y$

$$x_0 \in U, \qquad y_0 = f(x_0)$$

Jeśli $f'|_{x_0} : T_{x_0}\mathbb{R}^n_x \longrightarrow T_{y_0}\mathbb{R}^n_y$ jest izomorfizmem, to f^{-1} istnieje i jest C^1 w pewnym otoczeniu y_0;

dokładniej: istnieją takie otoczenia

$$x_0 \in U_0 \subset U, \qquad y_0 \in V_0 \subset \mathbb{R}^n_y$$

$U_0 \xrightarrow{f} V_0$ jest bijekcją i $f^{-1} \in C$

⚠ : 1) popularnie TFU mówi, że równanie $F(x,y)=0$ daje się rozwikłać względem y.

a) równanie $x^2+y^2=0$ nie daje się ~~przedst~~ rozwiązać wzgl. y, w żadnym otoczeniu $(0,0)$

b) ~~równanie~~ zbiór rozwiązań $x^2-y^2=0$ jest sumą mnogościową dwóch wykresów $y=x$, $y=-x$; ten zbiór zawiera wykres każdej funkcji postaci

$$\varphi(x) = \lambda_A(x)\, x, \quad \text{gdzie}$$

$$\lambda_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ -1 & x \notin A \end{cases}$$

c) $y^3 - x^{3k+1} = 0$; rozw.: $y = x^{k+\frac{1}{3}}$
klasy C^k ale nie C^{k+1}

(później wykażemy, że przy założeniach TFU i $F \in C^k$ rozwiązanie φ jest klasy C^k).

2) Odwracalność przekształcenia liniowego $\Leftrightarrow$ wyznacznik jest $\neq 0$; zatem $D_y F(x_0, y_0)$ jest odwracalne $\Leftrightarrow$ w dowolnych bazach (układach współrzędnych)

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $F = (F_1, \ldots, F_m)$

jakobian
$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}(x_0, y_0) \neq 0.$$

(inne sformułowanie założenia TFU); dla TFO chodzi o jakobian $\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = \frac{\partial(f_1, \ldots f_n)}{\partial(x_1, \ldots x_n)}(x_0)$.

W szczególności gdy $m = 1$, to zał. TFU oznacza $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

d) $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (rozbicie na Re i Im),

$\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ $\qquad f(z) = z^2$ (albo z^k, $k > 1$)

jeśli $z_0 \neq 0$, to $f'(z_0) \neq 0$, ale globalnie f nie jest odwracalne. Zatem TFO ma charakter lokalny.

3) W TFU i TFO różniczk. i odwracalność odpowiedniego przekształcenia nie wystarczają:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$$

$$f(x_1, x_2) = \left(x_1, \begin{cases} x_2 - x_1^2, & \text{gdy } x_1^2 \le x_2 \\ \dfrac{x_2^2 - x_1^2 x_2}{x_1^2} & \text{gdy } 0 \le x_2 \le x_1^2 \end{cases}\right.$$

ta funkcja jest nieparzysta wzgl. x_2

tzn. $f(x_1, -x_2) = -f(x_1, x_2)$

Wtedy ~~Łatwo~~ sprawdzić, że

1° f jest różniczkowalna w $\mathbb{R}^2$

2° $f'(0) = I$

3° f nie jest odwracalna, bo

$$f(x_1, x_1^2) = f(x_1, -x_1^2) = 0.$$

4) Obliczanie pochodnej "rozwikłania" $\varphi(x)$ lub f^{-1}.

$$F(x, \varphi(x)) \equiv 0$$

(z definicji φ)

Ponieważ wiadomo (przy zał. TFU) że $\varphi \in C^1$, więc, różniczkując,

$$D_x F(x, \varphi(x)) + D_y F(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$$

w szczególności, dla $x = x_0$ $\varphi(x_0) = y_0$ i

$$D_x F(x_0, y_0) + D_y F(x_0, y_0)\, \varphi'(x_0) = 0$$

$$\varphi'(x_0) = -(D_y F)^{-1} \circ D_x F \Big|_{(x_0, y_0)}$$

złożenie przekszt. liniowych

Np.: niech $y=y(x)$ będzie określona przez równanie

5

$$y - \varepsilon \sin y = x \qquad (0<\varepsilon<1).$$

$x_0 = 0, \quad y_0 = 0.$

Zatem

$$F(x,y) \equiv y - \varepsilon \sin y - x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \varepsilon \cos y \neq 0 \quad \forall y$$

$\Rightarrow$ zał. TFU spełnione

$\Rightarrow$ $y = y(x) \in C^1$, przynajmniej lokalnie

(Łatwo wykazać, że też globalnie)

różniczkując:

$$y' - \varepsilon \cos y \; y' - 1 = 0$$

$$y' = \frac{1}{1-\varepsilon \cos y}$$

niestety $y=y(x)$ nie znany. Ale ten wzór wyraża y' przez y (w ogólniejszym przypadku wchodzi tu również x)

w szczególności

$$y'(0) = \frac{1}{1-\varepsilon \cos \underbrace{y(0)}_{y_0=0}} = \frac{1}{1-\varepsilon}$$

Albo: niech $z=z(x,y)$ spełnia

$$\underbrace{z^3 - xz + y}_{F} = 0 \qquad (x_0,y_0) = (3,-2),\; z_0 = 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - x \Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0}} = 3\cdot 2^2 - 3 \neq 0.$$

Zatem, z TFU, $z \in C^1$, i różniczkując

$$\begin{cases} 3z^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} - z - x\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ 3z^2 \dfrac{\partial z}{\partial y} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0 \end{cases}$$

To jest układ liniowy wzgl. $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ i przy założeniu TFU jest on zawsze cramerowski, więc jednoznacznie rozwiązalny.

W naszym przypadku, w (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{matrix} 3\cdot 4 \dfrac{\partial z}{\partial x} - 2 - 3\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ 3\cdot 4 \dfrac{\partial z}{\partial y} - 3\dfrac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dots \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dots \end{matrix}$$

Przy założeniach TFO

$$(f^{-1})' = (f')^{-1}.$$

5) Stosując wielokrotne rozdmuchania (punktów, krzywych) można sprowadzić układ równań nie spełniających założeń TFU do układu spełniającego te założenia.

Np.

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \qquad a \neq 0 \text{ const}$$

W $(0,0)$ – zał. nie spełnione: jeśli

$$F = (x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2)$$

to $\frac{\partial F}{\partial x}(0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0) = 0$. Podstawmy

$$y = ux \qquad (\text{rozdmuchanie } 0)$$

wtedy

$$F = x^4(1+u^2)^2 - a^2x^2(1-u^2);$$

$F=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$ lub

$$G \overset{df}{=} a^2(1-u^2) - x^2(1+u^2)^2 = 0$$

dla $x=0$ $\quad u=\pm 1$

$$\frac{\partial G}{\partial u}\Big|_{u=\pm 1} = \mp 2a^2 \neq 0$$

Zatem istnieją (w otoczeniu $x=0$)

dwie „gałęzie" rozwiązań

$u = u_1(x) \qquad u_1(0)=1$

$u = u_2(x) \qquad u_2(0)=-1$

i wobec tego

$$y = u_1(x)x \quad \text{lub} \quad y = u_2(x)x.$$

Pochodne $u_1'(0)$, $u_2'(0)$ można wyznaczyć jak poprzednio

Analogicznie dla $x=vy$.

6) TFU i TFO są równoważne:

żeby uzyskać TFO z TFU, wystarczy zastosować TFU do równania $F(x,y) \equiv f(x) - y = 0$;

to równanie jest rozwiązalne względem x: $x=\varphi(y)$

$y \in C^1$.

na odwrót: niech $f(x,y) = (x, F(x,y))$

$(x \in \mathbb{R}^n_x$, $y \in \mathbb{R}^m_y$, i wartości f leżą w $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m)$

Wtedy $f'(x_0,y_0)$ ma postać $\begin{pmatrix} I & \text{coś} \\ 0 & D_yF|_{(x_0,y_0)} \end{pmatrix}$

więc $f'|_{(x_0, y_0)}$ jest odwracalne i ~~...~~ niech

$g = f^{-1}$. Zatem, jeśli $g(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v))$

$u \in \mathbb{R}^n$
$v \in \mathbb{R}^m$

to

$$u = g_1(u,v)$$
$$v = F(g_1(u,v), g_2(u,v))$$

albo $x = g_1(u,v)$
$y = g_2(u,v)$

$$\Rightarrow \quad g_1(u,v) = u$$
$$v = F(u, g_2(u,v))$$

Stąd: $F(x,y) = 0 \iff y = g_2(x,0)$, więc

$$\varphi(x) = g_2(x,0).$$

<u>Dowód TFO</u>: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $A = f'|_{x_0}$.

1° można przyjąć, że $A = id = I$. Bo niech

$$g = A^{-1} f \quad : U \longrightarrow \mathbb{R}^n_y$$
$$x_0 = 0 \longrightarrow 0$$

Wtedy $g \in C^1$, $g'|_{x_0} = I$. Jeśli g jest odwracalne, to $f^{-1} = (Ag)^{-1} = g^{-1}A^{-1}$.

Niech $\varphi(x) = -(f(x) - x)$; zatem $\varphi \in C^1$,

$\varphi'(0) = 0$, więc, dla pewnego $r > 0$

$$\|\varphi'\| < 1/2 \quad \text{w kuli } B(0; 2r).$$

$\Rightarrow$ φ jest lipsch. ze stałą $\leq \frac{1}{2}$ w tej kuli; $\varphi(0) = 0$.

$f(x) = x - \varphi(x)$ i do rozwiązania jest równanie $f(x)=y$ czyli $x-\varphi(x)=y$ (x trzeba wyrazić przez y). Szukamy rozwiązania x w postaci $x=y+u$, czyli

$$u = \varphi(y+u).$$

y i u będą (co do normy) $\leq r$. Stąd jednoznaczność u: gdyby były 2 rozwiązania u; u_1, u_2, to

$$|u_1-u_2| = |\varphi(y+u_1)-\varphi(y+u_2)| \underset{\text{Lipschitz}}{\leq}$$

$$\leq \frac{1}{2}|y+u_1-y-u_2| = \frac{1}{2}|u_1-u_2|$$

(sprzeczność).

2° istnienie $u=u(y)$: metodą kolejnych przybliżeń: $u_0 \equiv 0$,

$$u_{\nu+1}(y) = \varphi(y+u_\nu(y)).$$

$$|u_{\nu+1}-u_\nu| \leq \frac{1}{2}|u_\nu-u_{\nu-1}| \leq \dots$$

$$\leq \frac{1}{2^\nu}|u_1-u_0| = \frac{1}{2^\nu}|\varphi(y)|$$

$$\leq \frac{1}{2^{\nu+1}} r \qquad \text{gdy} \quad |y| \leq r$$

(jak zaznaczono poprzednio)

(wszystko przy założeniu, że $|u_1|, \dots, |u_\nu| \leq r$); ale to łatwo udowodnić przez indukcję, nawet więcej:

$$|u_\nu| \leq \sum_{j \leq \nu} \frac{1}{2^j} r$$

Krok indukcyjny: jeśli $|u_\nu| \leq \sum_{j \leq \nu} \frac{1}{2^j} r$, to

$$|u_{\nu+1}| \leq |u_\nu| + |u_{\nu+1} - u_\nu| \leq \sum_{j \leq \nu} \frac{1}{2^j} r + \frac{1}{2^{\nu+1}} r$$

$$= \sum_{j \leq \nu+1} \frac{1}{2^j} r \Big)$$

Stąd wynika ~~jedn~~ warunek Cauchy'ego na zbieżność jednostajną:

$$|u_{\nu+\mu} - u_\nu| \leq \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{2^{\nu+j}} r \leq \frac{1}{2^\nu} r .$$

Zatem $u_\nu \rightrightarrows u$ w $B(0,r)$, u jest ciągłym rozwiązaniem równania $u = \varphi(y+u)$, i $\forall y$ $u(y)$ jest jedynym rozwiązaniem tego równania.

3° Wystarczy wykazać, że $f^{-1}(y) = y + u(y) \in C^1$.

Najpierw wykażemy, że $u(y)$ jest Lipschitz. (ze stałą 1) w $B(0,r)$.

To wynika stąd, że wszystkie $u_\nu(y) \in C^1$ (oczywista indukcja) i $|u_\nu'| \leq 1$ (też indukcja:

$$|u_{\nu+1}'| \leq \cancel{|\varphi'(y+u_\nu)| |1+u_\nu'|} \leq |\varphi'(y+u_\nu)(I+u_\nu')|$$

$$\leq \frac{1}{2}(1+|u_\nu'|) \leq 1 \quad);$$

stąd wynika, że w kuli wszystkie u_ν są Lipsch. ze stałą 1, więc ich granica też.

Teraz wystarczy skorzystać z następującego lematu:

<u>Lemat</u>: Niech f będzie C^1 (w zbiorze otwartym zawierającym pewną kulę domkniętą), $f'(x)$ odwracal[ne] $\forall x$, $f^{-1} = h$ niech będzie dobrze określone w pewnej kuli, Lipschitzowskie. Wtedy $h \in C^1$.

D.
$$f(x) = f(x_0) + f'\big|_{x_0}(x - x_0) + R(x)$$

(x, x_0 - dowolne)

dla $|x - x_0| < \delta$ $\quad |R| \leq \varepsilon |x - x_0|$

Podstawmy $x = h(y)$, $x_0 = h(y_0)$; niech $A = f'\big|_{x_0}$ = liniowe odwracalne; niech $\tilde{R}(y) = R(h(y))$

Wtedy
$$y = y_0 + A\,(h(y) - h(y_0)) + \tilde{R}(y)$$

więc
$$h(y) = h(y_0) + A^{-1}(y - y_0) - A^{-1}\tilde{R}(y).$$

$|\tilde{R}(y)| \leq \varepsilon |x - x_0|$; ale $|x - x_0| = |h(y) - h(y_0)| \leq \underbrace{C}_{\text{stała L. dla } h} |y - y_0|$

Zatem jeśli $|y - y_0| < \frac{\delta}{C}$, to $|\tilde{R}(y)| \leq C\varepsilon |y - y_0|$,

$|A^{-1}\tilde{R}(y)| \leq |A^{-1}| \cdot C\varepsilon |y - y_0|$; ale $|A^{-1}| = |(f'\big|_{x_0})^{-1}| \leq C_1$ dla pewnej stałej C_1, bo f'^{-1} istnieje $\forall$ i jest ciągła. A więc h jest różniczk. $\forall y_0$,

oraz $h'(y_0) = (f'\big|_{x_0})^{-1} \iff h' = \underbrace{f'^{-1}}_{\text{ciągła}} \circ h$, więc $h \in C^1$.

$x_0 = h(y_0)$