Analiza II*, 3.I.'12

Mierzalność przedziałów

Def. Zbiory $A, B \subset \mathbb{R}^n$ (lub przestrzeni metrycznej) są w odległości $\geq \delta > 0$ jeśli

$$|a-b| \geq \delta \qquad \forall a \in A,\ b \in B.$$

Stw. Jeśli A, B są (dla dowolnego $\delta > 0$) w odległości $\geq \delta$, to miara zewnętrzna jest na nich addytywna:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

D. Wystarczy nierówność $\geq$. Niech $\varepsilon > 0$ i weźmy takie pokrycie $A \cup B \subset \bigcup P_i$ przedziałami, że

$$\sum \operatorname{vol} P_i \leq |A \cup B| + \varepsilon.$$

Krająć każde P_i można założyć, że $\forall_i$

$$\operatorname{diam} P_i < \delta/2.$$

Wyrzucając niepotrzebne P_i można dalej założyć, że $\forall_i$

$$P_i \cap (A \cup B) \neq \emptyset.$$

Zauważmy, że jeśli $P_i \cap A \neq \emptyset$, to $P_i \cap B = \emptyset$, i na odwrót. Zatem

$$\sum_i \operatorname{vol} P_i = \sum_{i:\ P_i \cap A \neq \emptyset} \operatorname{vol} P_i + \sum_{i:\ P_i \cap B \neq \emptyset} \operatorname{vol} P_i.$$

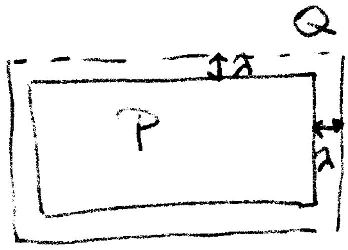
Ale $\bigcup_{i:\, P_i\cap A\neq\emptyset} P_i \supset A$, więc $|A| \le \sum_{i:\, P_i\cap A\neq\emptyset} \mathrm{vol}\, P_i$; analogicznie z B. Zatem

$$|A\cup B| \ge \sum \mathrm{vol}\, P_i - \varepsilon = \sum_{i:\, P_i\cap A\neq\emptyset} \cdots + \sum_{i:\, P_i\cap B\neq\emptyset} \cdots - \varepsilon$$

$$\ge |A| + |B| - \varepsilon.$$

<u>Stw.</u> Każdy przedział P jest mierzalny.

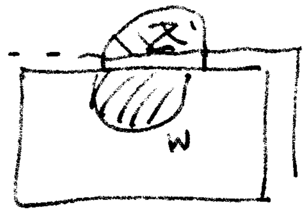
D. ε - dowolne.



Powiększmy P do Q: ponieważ $Q \setminus P$ = suma 2^n przedziałów, z ~~których~~ które mają jeden bok długości λ,

więc $|Q - P| < \varepsilon$, dla λ dostat. małego, ale >0

Niech $W \subset P$, $Z \subset P'$ - dowolne; wtedy



niech $\tilde{Z} = Z \setminus Q$;

$$Z = \tilde{Z} \cup \underbrace{\left[Z \cap (Q\setminus P)\right]}$$

ten zbiór ma miarę zewn. $\le |Q\setminus P| < \varepsilon$.

$\Rightarrow |Z| \le |\tilde{Z}| + \varepsilon$

Zatem

$$|W| + |Z| \le |W| + |\tilde{Z}| + \varepsilon$$

$$= |W \cup \tilde{Z}| + \varepsilon \le |W \cup Z| + \varepsilon.$$

bo W i $\tilde{Z}$ są w odległ. $\ge \lambda > 0$

⚠ Ten argument jest słuszny dla każdego zbioru A (zamiast P) o własności następującej:

$$\forall \varepsilon \quad \exists\, U = \text{otoczenie } \supset \partial A \qquad |U| < \varepsilon.$$

$$\partial A \overset{df}{=} \bar{A} \setminus \mathring{A}, \qquad \mathring{A} = \operatorname{int} A.$$

$\Rightarrow$ każdy zbiór otwarty jest mierzalny (bo każdy otwarty jest sumą przeliczalnej liczby przedziałów), a więc każdy zb. borelowski jest mierzalny.

Charakteryzacja zb. mierzalnych

Nast. warunki są równoważne:

1) A jest mierzalny

2) $\forall \varepsilon \quad \exists \underset{\text{otwarty}}{U} \supset A \qquad |U \setminus A| < \varepsilon$

3) $\exists \underset{G_\delta}{G} \supset A \qquad |G \setminus A| = 0 \iff A = G \setminus (\text{zb. miary } 0)$

2') $\forall \varepsilon \; \exists \underset{\text{domk.}}{F} \subset A \qquad |A \setminus F| < \varepsilon$

3') $\exists \underset{F_\sigma}{S} \subset A \qquad A = S \cup \text{zb. miary } 0.$

D. 1) $\Rightarrow$ 2):

a) A ograniczony $\Rightarrow$ $|A| < \infty$.

Pokrywamy A przedziałami :

$$A \subset \bigcup P_i , \quad \sum |P_i| < |A| + \varepsilon .$$

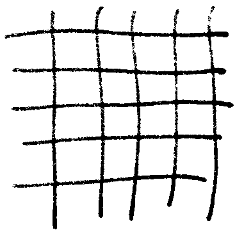
Niech $P_i \subset \underset{\text{otwarty}}{Q_i}$, $\quad |Q_i| < |P_i| + \frac{\varepsilon}{2^i}$,

$$U \overset{df}{=} \bigcup Q_i \ \text{- otwarty}, \quad A \subset U$$

$$|U| \leq \sum |P_i| + \varepsilon < |A| + 2\varepsilon ;$$

$$|U \setminus A| = |U| - |A| < 2\varepsilon .$$

b) A dowolny. Pokrajmy $\mathbb{R}^n$ kostkami domkniętymi np. o długości boków $= 1$:



Przecinając A tymi kostkami uzyskamy zbiory mierzalne A_j, ograniczone, $\bigcup A_j = A$.

Korzystając z a), dla każdego j znajdziemy taki otwarty $U_j \supset A_j$, że $|U_j \setminus A_j| < \frac{\varepsilon}{2^j}$.

Niech $U = \bigcup U_j$, wtedy $A \subset U$ i

$$U \setminus A = \bigcup (U_j \setminus A) \subset \bigcup (U_j \setminus A_j)$$

$$\Rightarrow \quad |U \setminus A| \leq \sum |U_j \setminus A_j| < \varepsilon .$$

2) $\Rightarrow$ 3) : niech, $\forall j$,

$$A \subset \underset{\text{otwarty}}{U_j} , \quad |U_j \setminus A| < \frac{1}{j}$$

$$G \overset{df}{=} \bigcap U_j \in G_\delta$$

Wtedy $A \subset G$, $\quad |G \setminus A| \le |U_j \setminus A| < \frac{1}{j}$ $\quad \forall j$.

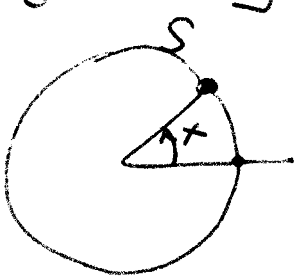
3) $\Rightarrow$ 1) : wynika z zupełności miary Lebesgue'a.

Dowody 1) $\Rightarrow$ 2') $\Rightarrow$ 3') są analogiczne.

⚠ Dla dowolnego A istnieje taki $G \in G_\delta$, że $A \subset G$, $|A| = |G|$.

<u>Przesuwalność miary Lebesgue'a</u>: niech τ będzie dowolnym przesunięciem; wtedy A jest mierzalny $\Leftrightarrow$ $\tau(A)$ jest mierzalny i $|\tau(A)| = |A|$. (tak jest również dla dowolnych izometrii, ale jest trudniejsze do dowodu).

<u>Przykład zbioru niemierzalnego</u>. Najpierw na okręgu jednostkowym S: rolę przedziałów odgrywają łuki; zamiast przesunięć jest obrót. Punkty okręgu = kąty = liczby mod 2π



Niech $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ jest współmierne z π

Wtedy S rozbija się na klasy abstrakcji.

Niech $A \subset S$ będzie takim zb., że A ma dokł. jeden element wspólny z każdą klasą abstrakcji.

Dla $w \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ niech A_w będzie A po obrocie o kąt $2\pi \cdot w$. Wtedy

1° $A_w \cap A_{w'} = \emptyset$, gdy $w' \neq w$

2° $\bigcup A_w = S$.

D. 1° niech $x \in A_w \cap A_{w'}$, $w' < w$

τ_w = obrót o kąt $2\pi w$.

wtedy $x = \tau_{w'}(a') = \tau_w(a)$

dla pewnych $a, a' \in A$

$\Rightarrow a' = \tau_{w-w'}(a)$

więc A zawiera dwa punkty (a, a') w tej samej klasie abstrakcji.

2° $x \in S$ dowolny, $a \in [x]$. Zatem x powstaje z $a \in A$ przez obrót o kąt współmierny z 2π.

Zał., że A jest mierzalny. ~~Wtedy wszystkie~~ A_w też i $|A_w| = |A|$ (przesuwalność). Zatem

$$2\pi = |S| = \sum |A_w| = \sum |A| ;$$

jeśli $|A| > 0$, to $\sum |A| = \infty$; jeśli $|A| = 0$, to $\sum |A| = 0$ (sprzeczność).

<u>Wersja dla prostej</u>. $(0,1)$ zamiast S; $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$; niech $A \subset (0,1)$ zawiera dokładnie jeden element w każdej klasie abstrakcji. Teraz w przebiega $\mathbb{Q} \cap (-1,1)$, τ_w = przesunięcie

o w : $\tau_w(x) = w + x$, $A_w = \tau_w(A)$

Niech $B = \bigcup_w A_w$; wtedy

1° A_w są parami rozłączne,

2° $(0,1) \subset B \subset (-1,2)$

(dowody – jak poprzednio). Gdyby A był mierzalny, ~~to~~ wszystkie A_w też, $|A_w| = |A|$; oraz

$$1 = |(0,1)| \leq |B| \leq |(-1,2)| = 3,$$

$|B| = \sum_w |A|$ – albo 0 albo ∞ (sprzeczność).

⚠ 1) Analogiczna konstrukcja w $\mathbb{R}^n$.

2) Ogólniej, dowodzi się, że każdy zbiór w $\mathbb{R}^n$ miary zewnętrznej dodatniej zawiera zbiór niemierzalny

3) Jeśli założyć pewnik wyboru tylko dla przeliczalnych rodzin zbiorów, to nie da się udowodnić istnienia zbioru niemierzalnego (Solovay).

Wnioski z tw.: 1) $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ mierzalne

$\Rightarrow$ $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ jest mierzalny.

D. $A = S \cup Z$ $\quad S \in F_\sigma$, $|Z| = 0$,

$B = T \cup W$ $\quad T \in F_\sigma$, $|W| = 0$

$\Rightarrow A \times B = (S \times T) \cup (S \times W) \cup (Z \times T) \cup (Z \times W)$

$S \times T \in F_\sigma$. Że każdy z pozostałych składników jest miary 0, wynika z następującej uwagi:

jeśli $A \subset \mathbb{R}^n$ dowolny, $Z \subset \mathbb{R}^m$, $|Z| = 0$

to $|A \times Z| = 0$

D. można założyć, że A jest ograniczony (bo A jest przelicz. sumą zb. ograniczonych) : $A \subset Q$ przedział

ε = dowolne ; pokryjmy $Z \subset \bigcup P_i$,

$\sum |P_i| < \varepsilon$. Wtedy

$$A \times Z \subset \bigcup (Q \times P_i),$$

$$|Q \times P_i| = |Q| \cdot |P_i| \Rightarrow$$

$$\sum |Q \times P_i| = |Q| \sum |P_i| \leq |Q| \varepsilon.$$

2) $Z \subset \mathbb{R}^n$, $|Z| = 0$, $Z \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ lipschitzowskie

$\Rightarrow |f(Z)| = 0$.

⚠ nie zawsze prawda dla f hölderowskich.

D. Można założyć, że f jest określone na $\mathbb{R}^n$ (Kirszbraum: każde przekszt. Lipschitzowskie określone na podzbiorze $\mathbb{R}^n$ o wartościach w $\mathbb{R}^m$ można rozszerzyć do przekszt. Lipsch. na $\mathbb{R}^n$, bez zmiany stałej Lipschitza ; ważne, że w $\mathbb{R}^m$ używa się normy zadanej przez iloczyn skalarny).

~~D.~~ ε-dowolne; $Z \subset \bigcup P_i$, $\sum |P_i| < \varepsilon$;

krająć P_i i nieco ~~je~~ je powiększając, można przyjąć, że wszystkie P_i mają wszystkie boki równe; zatem ~~...~~ $(\operatorname{diam} P_i)^n \le C\, |P_i|$

C – zależy tylko od n.

Niech L = stała Lipschitza dla f; wtedy

$$\operatorname{diam}(f(P_i)) \le L \operatorname{diam} P_i$$

$\Rightarrow$ $f(P_i)$ jest zawarta w kostce Q_i (= przedział o wszystkich bokach równych) o ~~...~~ średnicy $\le C' \operatorname{diam} P_i$

zależne tylko od n

Zatem

$$~~...~~\ |f(P_i)| \le C'^n C^n\ |P_i|,$$

$$|f(Z)| \le \sum C'^n C^n\, |P_i| < (CC')^n \varepsilon .$$

<u>Wniosek</u> $\underset{\text{mierzalny}}{A} \subset \underset{\text{otwarty w } \mathbb{R}^n}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$

f – lokalnie Lipsch.

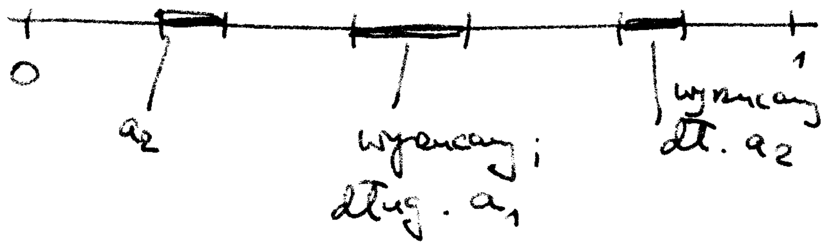
(np. ~~...~~ C^1)

Wtedy $f(A)$ jest mierzalny.

D. $A = S \cup Z$, $S \in F_\sigma$, $|Z| = 0$.

S można przedstawić jako sumę przelicz. liczby zbiorów zwartych, więc $f(S) \in F_\sigma$; $|f(Z)| = 0$, więc $f(A) = f(S) \cup f(Z)$ jest mierzalny.

Przykład Zbiory typu Cantora



itd

to, co zostanie = zb. typu Cantora $C_{\underline{a}}$ (domknięty)

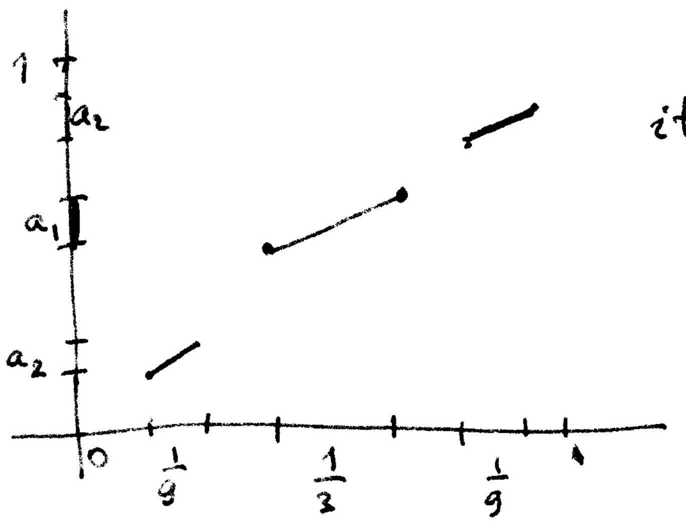
Zatem
$$|C_{\underline{a}}| = 1 - \sum_{1}^{\infty} 2^{n-1} a_n$$

Jeśli $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3^2}$, ..., to uzyskamy zb. Cantora $\mathcal{C}$ i jego miara $= 1 - \sum 2^{n-1}\frac{1}{3^n} =$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 0.$$

Ale jeśli tylko $\sum 2^{n-1}a_n < 1$, to $|C_{\underline{a}}| > 0$.

Dla każdego $\underline{a}$ istnieje homeom. $[0,1] \xrightarrow{h} [0,1]$, $h(\mathcal{C}) = C_{\underline{a}}$:



itd.

Niech $|C_{\underline{a}}| > 0$. Wtedy $C_{\underline{a}}$ zawiera podzbiór niemierzalny K.

Ale $\underset{\underset{K_0}{\parallel}}{h^{-1}(K)} \subset \mathcal{C}$

więc K_0 jest miary 0, więc jest mierzalny.

$K = h(K_0)$, czyli obraz ~~Kon~~ zbioru mierzalnego przy homeom. nie musi być mierzalny.