Analiza II*, 2. XII. '11.

Uzupełnienia o funkcjach klasy C^∞. I jeśli $f \in C^\infty$ w otoczeniu 0, to $\exists\, g_i \in C^\infty$

$$f(x) = f(0) + \sum x_i\, g_i(x)$$

powtarzając: $\exists h_{ij} \in C^\infty$ $\quad g_i(x) = \overbrace{g_i(0)}^{c_i} + \sum x_j\, h_{ij}(x)$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f(0) + \sum c_i\, x_i + $$

$$+ \sum h_{ij}(x)\, x_i\, x_j .$$

Z konieczności $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ (po zróżniczkowaniu).

Itd. Ostatecznie, $\forall m$:

$$f(x) = T_0^m f(x) + \sum_{|\alpha| = m+1} h_\alpha(x)\, x^\alpha ,$$

$$h_\alpha \in C^\infty .$$

(gładkość reszty we wzorze Taylora).

II. Jeśli M: $\underset{y \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n}{y = \varphi(x)}$ $\quad \varphi \in C^\infty$, $\quad f(x,y) = 0$ na M, to $\exists g \in C^\infty$

$$f(x,y) = (y - \varphi(x))\, g(x,y) .$$

Stąd wynika:

1° niech $f \in C^\infty$ (w otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^n$),

$f(0) = 0$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(0) \neq 0$;

z TFU, w otoczeniu 0 :

$f = 0 \iff x_n = \varphi(x') \qquad x' = (x_1, \dots x_{n-1})$,

$\varphi \in C^\infty$, i

$$f = (x_n - \varphi(x'))\, g(x) , \quad g \in C^\infty ,$$

$g(0) \neq 0$, z obustronnego zróżniczkowania względem x_n i podstawienia $x = 0$.

2° niech $h \in C^\infty$, $\{h=0\} \supset \{f=0\}$; wtedy (w otoczeniu 0)

$$h = f\, h_1 \quad \text{dla pewnej } h_1 \in C^\infty$$

(bo $h = (x_n - \varphi(x'))\, h_2$, $x_n - \varphi(x') = \frac{1}{g} f$).

3° $h \in C^\infty$; wtedy $\exists\, h_3(x), \psi(x')$ $h = (x_n - \varphi(x'))\, h_3(x) + \psi(x')$

Def Kiełek funkcji w $x_0 \in X$ = przestrzeń topol.

rozpatrujemy funkcje określone na otoczeniach x_0 :

$$x_0 \in U_f \xrightarrow{f} Y \uparrow \text{ustalone}$$

$f \sim g \iff f = g$ na pewnym otoczeniu x_0 .

Klasy abstrakcji = kiełki.

$\mathcal{O}_n$ = kiełki w 0 funkcji analitycznych na $\mathbb{R}^n$,

czyli $\mathcal{O}_n$ = szeregi potęgowe zbieżne o środku w 0

(o dodatnim promieniu zbieżności, czyli zbieżne w pewnej kuli zależnej od szeregu)

(dzielenie z resztą: $h_3 \in C^\infty$ iloraz, $\psi(x')$ = reszta)

$\mathcal{E}_n$ = kiełki w 0 funkcji klasy C^∞ na $\mathbb{R}^n$.

Kiełki f,g funkcji (o wartościach skalarnych) są równoważne

jeśli $\exists h$ odwracalne (tzn $h(x_0)\neq 0$) że $g=fh$

Wielomian wyróżniony (stopnia p) względem x_n:

funkcja (kiełek) postaci

$$x_n^p + \sum_{0\le i<p} a_i(x')\, x_n^i, \quad a_i \in \mathcal{O}_{n-1} \text{ lub } \mathcal{E}_{n-1}.$$

<u>Tw. przygotowawcze</u> (Weierstrassa dla $\mathcal{O}_n$, Malgrange'a dla $\mathcal{E}_n$); niech na chwilę $A_n=\mathcal{O}_n$ lub $\mathcal{E}_n$):

Niech $f\in A_n$, $f(0)=0$, $\frac{\partial^i f}{\partial x_n^i}(0)=0$ ($i<p$), $\frac{\partial^p f}{\partial x_n^p}(0)\neq 0$. Wtedy $\exists$ wielomian wyróżniony

$$W(x) = x_n^p + \sum_{i<p} a_i(x')\, x_n^i, \quad a_i \in A_{n-1},$$ że

$$f = WQ, \quad Q\in A_n, \quad Q(0)\neq 0$$

(w klasie funkcji analitycznych W jest wyznaczony jednoznacznie), oraz każda $g\in A_n$ daje się podzielić z resztą przez f (albo W, równoważnie):

$$g = hf + \sum_{i<p} b_i(x')\, x_n^i, \quad b_i\in A_{n-1}.$$

Udowodnimy pozornie mocniejszą wersję tego tw. dla funkcji analitycznych.

⚠ TFU i TFO są słuszne dla f. analitycznych.

__$\mathbb{R}$-algebry lokalne__ : Pierścienie A z 1, wyposażone w zanurzenie $\mathbb{R} \xrightarrow[\text{homomorfizm pierścieni}]{\varepsilon} A$, z jedynym ideałem maksymalnym $m_A = m$ (składającym się ze wszystkich elementów nieodwracalnych.

W dalszym ciągu zawsze zakładamy, że

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[rrr, bend right, "\text{izomorfizm}"'] & A \arrow[r] & A/m & = \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

oraz że m_A jest skończenie generowany nad A.

__Główny przykład__ : $A = \mathcal{O}_n$ lub $\mathcal{E}_n$; m = ideał wszystkich funkcji zerujących się w 0; jest on generowany przez $x_1, \dots, x_n$. Dalsze przykłady: pierścienie ilorazowe $A/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ = ideał w A. Obrazem ε są funkcje stałe

__Lemat Nakayamy__: M = skończ. generowany moduł nad algebrą lokalną A, $M' \subset M$ podmoduł. Jeśli

$$M = M' + m_A M,$$

to $M' = M$.

__Dowód__: Przechodząc do $N = M/M'$ otrzymamy

$$N = m_A N,$$

wykażemy, że $N = 0$. Bo niech n_i = generatory N; wtedy

$$n_i = \sum a_{ij} n_j \quad \text{dla pewnych } a_{ij} \in m_A$$

więc
$$\sum (\delta_{ij} - a_{ij}) x_j = 0 \quad \forall i$$

Niech $\Delta = \det(\delta_{ij} - a_{ij}) = 1 +$ coś z $\mathfrak{m}_A$, więc $\Delta \notin \mathfrak{m}_A \Rightarrow \Delta$ jest odwracalny; ponieważ $\Delta x_j = 0 \quad \forall j$ (wzory Cramera), więc $x_j = 0 \quad \forall j$.

Lemat: Niech $\mathfrak{a} \subset A$ będzie ideałem. Wtedy:
$$\mathfrak{a} \supset \mathfrak{m}_A^k \text{ dla pewnej } k \in \mathbb{N} \iff \dim_{\mathbb{R}} A/\mathfrak{a} < \infty.$$

D. $\Rightarrow$

$\forall l \quad \mathfrak{m}_A^l / \mathfrak{m}_A^{l+1}$ jest sk. wymiarowa nad $A/\mathfrak{m}_A = \mathbb{R}$

Rozpatrzmy
$$A \supset \mathfrak{m}_A \supset \mathfrak{m}_A^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{m}_A^k;$$
wtedy
$$A/\mathfrak{m}_A, \quad \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2, \ldots$$
są sk. wymiarowe nad $\mathbb{R}$, więc $A/\mathfrak{m}_A^k$ jest sk. wymiarowa, więc również $A/\mathfrak{a}$, jako obraz $A/\mathfrak{m}_A^k \to A/\mathfrak{a}$.

$\Leftarrow$ $C = A/\mathfrak{a}$ jest algebrą lokalną;

$$C \supset m_C \supset m_C^2 \supset \cdots$$

jest to ciąg zstępujący przestrz. wektorowych $/\mathbb{R}$ skończ. wymiarowych (bo C jest sk. wymiarowe nad $\mathbb{R}$), więc $\exists\, l$

$$m_C^l = m_C^{l+1}$$

i z lematu Nakayamy $m_C^l = 0$ czyli $m^l \subset \alpha$.

Niech teraz $(\mathbb{R}^n_x, 0) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{R}^m_y, 0)$, czyli

$$\varphi: \quad y_i = \varphi_i(x), \qquad \varphi(0) = 0 \Leftrightarrow \varphi_i \in m_x \ \forall i$$

$$\varphi_i \in \mathcal{O}_n = \mathcal{O}_x .$$

Wtedy określamy homomorfizm algebr

$$\mathcal{O}_y \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}_x$$
$$f \longmapsto f \circ \varphi .$$

$\mathcal{O}_x$ można rozpatrywać jak moduł nad $\mathcal{O}_y$

$$\psi(y) \odot g(x) \overset{df}{=} \varphi^*(\psi)\, g$$

na chwilę

$$= \psi(\varphi(x))\, g(x)$$

(tak jest dla homomorfizmów pierścieni: jeśli $R_1 \xrightarrow{u} R_2$, to R_2 jest modułem nad R_1 z mnożeniem: $r_1 \odot r_2 = u(r_1) r_2$).

<u>Def</u> φ^* jest skończony ($\overset{df}{\Leftrightarrow}$ φ jest sk.) jeśli $\mathcal{O}_x$ jest skończ. generowany nad $\mathcal{O}_y$;

tzn. istnieją takie $e_1(x), \dots, e_l(x) \in \mathcal{O}_x$,

że każda funkcja (kiełek) $g(x) \in \mathcal{O}_x$ daje się przedstawić w postaci

$$\sum \psi_i(\varphi(x))\, e_i(x) \quad , \quad \psi_i \in \mathcal{O}_y .$$

φ^* jest quasi-skończony $\iff$

$\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_x$ jest skończ. wym. $/\mathbb{R}$

$\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_y}$ = wszystkie funkcje analit. zmiennych y zerujące się w 0

więc $\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_x$ jest generowany przez wszystkie $\varphi_i(x)$.

Zatem: φ^* jest q.sk.

$\iff \exists_{sk.}\, e_i \in \mathcal{O}_x$ każda f $f \equiv \sum c_i e_i$ mod $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

c_i stałe

$\overset{\text{lemat}}{\iff}$ $\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_x \supset \mathfrak{m}_x^k$ dla pewnego k

czyli każda $g(x) \in \mathcal{O}_x$, której wszystkie pochodne w 0 znikają, daje się przedstawić jako

$$g(x) = \sum g_i(x)\, \varphi_i(x)$$

⚠ każda $g \in \mathcal{O}_x$ (lub $h \in \mathcal{O}_y$) dopuszcza kompleksyfikację (czyli określa - poprzez szereg potęgowy - kiełek funkcji na $\mathbb{C}^n$ (lub $\mathbb{C}^m$)).

Wtedy ten warunek jest równoważny:

w otoczeniu $0 \in \mathbb{C}^n$ jedynym wspólnym zerem wszystkich $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ jest 0

(wniosek z tw. Hilberta o zerach)

⚠ Jeśli φ^* jest skończone, to jest quasi-skończ.

Bo weźmy dowolne $g \in \mathcal{O}_x$; wtedy

$$g(x) = \sum \psi_i(\varphi(x))\, e_i(x) =$$

$$= \sum \Big(\psi_i(0) + \sum_j \varphi_j(x)\, h_{ij}(x)\Big)\, e_i(x)$$

z rozwinięcia ψ_i :

$$\psi_i(y) = \psi_i(0) + \sum_j y_j\, \chi_{ij}(y)$$

więc

$$\psi_i(\varphi(x)) = \psi_i(0) + \sum \varphi_j(x)\, \underbrace{\chi_{ij}(\varphi(x))}_{h_{ij}(x)}$$

$$= \sum c_i\, e_i(x) \mod \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_x$$

dla $c_i = \psi_i(0) \in \mathbb{R}$.

<u>Tw. przygotowawcze</u>: Jeśli φ^* jest quasi-skończ, to jest skończone: jeśli $[e_i] \in \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_y$ są generatorami $\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_y$, to e_i generują $\mathcal{O}_x$ nad $\mathcal{O}_y$

Dowód: $\mathfrak{m}_k^k \subset \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_x$ jak poprzednio (dla pewnego k), czyli $\forall$ wielowskaźnika α, $|\alpha| = k$

$$x^\alpha = \sum_i \lambda_{\alpha i}(x)\, \varphi_i(x) \qquad \lambda_{\alpha i} \in \mathcal{O}_x$$

Wykażemy, że wszystkie x^β, $|\beta| < k$, generują $\mathcal{O}_x$ nad $\mathcal{O}_y$.

Weźmy dowolną $f(x) \in \mathcal{O}_x$ i wtedy rozwinięcie f na szereg potęgowy można zapisać jako

$$f(x) = \tau(f)(x) + \sum_{|\alpha|=k} x^{\alpha} \sigma_{\alpha}(x) =$$

wszystkie wyrazy stopnia $<k$, czyli kombinacja liniowa (ze stałymi współczynnikami) x^{β}, $|\beta|<k$

$$= \tau(f)(x) + \sum \underbrace{\varrho_i(f)} \varphi_i(x)$$

$\varrho_i(f) \in \mathcal{O}_x$

(τ, ϱ_i = "operatory" na funkcjach, co nie jest istotne)

Teraz stosujemy to rozwinięcie do $\varrho_i(f)$:

$$\varrho_i(f) = \tau(\varrho_i(f)) + \sum \varrho_j(\varrho_i(f)) \varphi_j(x)$$

komb. liniowa ze stałymi wsp. x^{β}, $|\beta|<k$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \underbrace{\tau(f)(x) + \sum \tau(\varrho_i(f)) \varphi_i(x)} + \dots$$

komb. lin. x^{β} $(|\beta|<k)$ ze współczynnikami będącymi funkcjami od $\varphi(x)$, na tym etapie liniowymi.

Itd. Uzyskujemy rozwinięcie formalne:

$$f(x) = \sum_{|\beta|<k} S_\beta(\varphi(x))\, x^\beta$$

szeregi formalne.

Pozostaje dowieść zbieżności.

Dla $a(x) \in \mathcal{O}_x$ i $R>0$ niech

$$a(x) = \sum a_\alpha x^\alpha \quad \text{– rozwinięcie}$$

i

$$|a|_R = \sum |a_\alpha|\, R^{|\alpha|} \qquad (\text{może być} = \infty)$$

Ten symbol spełnia warunki normy i

$|ab|_R \le |a|_R\, |b|_R$ (chociaż może być $=\infty$).

Oczywiście, $\forall R$

$$|\tau(f)|_R \le |f|_R$$

i

$$|\sigma_\alpha(f)|_R \le \frac{1}{R^{|k|}} |f|_R$$

(jeśli "sensownie" wybrać $\sigma_\alpha(f)$, tzn. wszystkie jednomiany wszystkich składników $\sigma_\alpha(f)\, x^\alpha$ są jednomianami rozwinięcia w szereg f i nie ma powtórzeń).

Weźmy R_0 na tyle małe, że $\forall \alpha, i$

$$|\lambda_{\alpha i}|_{R_0} < \infty.$$

Wtedy

$$|\rho_i(f)|_R \leq \frac{C}{R^k} |f|_R \quad \text{dla } R<R_0$$

dla stałej C niezależnej od R.

Stąd wynika, że ℓ-te iteracje operatorów τ i ρ_i

dają oszacowania

$$\leq \frac{C^\ell}{R^{k\ell}} |f|_R$$

a więc szeregi są zbieżne.

<u>Przykład</u> $P(x) = x_n^p + \sum_{i<p} a_i(x')\, x_n^i$, $a_i \in \mathcal{O}_{x'}$.

Rozpatrzmy $(x', x_n) \xrightarrow{\varphi} (x', P(x))$. Wtedy $1, x_n, \dots, x_n^{p-1}$

generują $\mathcal{O}_x / m_y \mathcal{O}_x$