Algebra 2*, wiosna 2012, seria IX

Zadania na 23 kwietnia. Materiały do tej części wykładu i ćwiczeń znajdą Państwo w rozdziale VII książki Aluffiego *Algebra, Chapter 0.*

1. Niech $\overline{K}$ będzie algebraicznym domknięciem ciała K. Pokazać, że każdy automorfizm ciała K rozszerza sie do automorfizmu ciała $\overline{K}$.

   (a) Niech $\overline{\mathbb{Q}}$ będzie algebraicznym domknięciem ciała liczb wymiernych. Wykazać, że ciało $\overline{\mathbb{Q}}$ ma nieskończenie wiele automorfizmów.

   (b) Pokaż, że grupa automorfizmów ciała liczb rzeczywistych jest trywialna. (Wskazówka: zauważ najpierw, że jeśli $x > 0$ i h jest automorfizmem $\mathbb{R}$, to $h(x) > 0$.)

2. Niech K będzie ciałem charakterystyki $\neq 2$. Pokazać, że każde rozszerzenie $K \subset L$ stopnia 2 jest ciałem rozkładu wielomianu postaci $x^2 - a \in K[x]$, gdzie $a \in K$. Czy jest to prawda również dla ciała charakterystyki 2?

3. Znaleźć stopień nad $\mathbb{Q}$ ciał rozkładu następujących wielomianów:

   (a) $x^2 - 2$,
   (b) $x^3 - 2$,
   (c) $x^4 - 2$,
   (d) $x^4 + x^2 + 1$.

4. Niech L będzie ciałem rozkładu wielomianu $f \in K[x]$ gdzie $deg(f) = n$. Pokazać, że $[L : K] \leq n!$. Czy stopień rozszerzenia $[L : K]$ dzieli liczbę $n!$?

5. Niech $f,\ g \in K[x]$. Dowieść, że ciało rozkładu wielomianu f jest zawarte w ciele rozkładu wielomianu $f(g(x)) \in K[x]$.

6. Rozpatrzmy dowolne rozszerzenie ciał $K \subset L$. Pokaż, że zbiór elementów ciała L, które są rozdzielcze nad K jest ciałem (nazywamy je domknięciem rozdzielczym K w L).

7. Niech K będzie ciałem charakterystyki $p > 0$. Odwzorowanie Frobeniusa $\Phi : K \to K$ zadane jest wzorem $\Phi(a) = a^p$.

   (a) Pokaż, że Φ jest homomorfizmem (endomorfizmem) ciała K i jeśli K jest ciałem skończonym to Φ jest również jego automorfizmem.

(b) Znajdź zbiór elementów stałych K^{Φ^n}.

(c) Pokaż, że dla każdego n każde ciało algebraicznie domknięte charakterystyki p zawiera dokładnie jedno podciało mocy p^n.

(d) Pokaż, że jeśli moc ciała jest p^n to grupa jego automorfizmów jest cykliczna mocy n i generowana przez Φ.

8. Ciało K nazywamy doskonałym jeśli każde jego rozszerzenie algebraiczne jest rozdzielcze.

   (a) Pokaż, że każde ciało skończone jest doskonałe.

   (b) Pokaż, że ciało charakterystyki $p > 0$ jest doskonałe wtedy i tylko wtedy gdy jego endomorfizm Frobeniusa jest automorfizmem.

   (c) Pokaż, że ciało K charakterystyki $p > 0$ jest doskonałe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in K$ wielomian $x^p - a$ ma pierwiastek w K.

9. Ustalmy ciało K. Dla liczby naturalnej d przez $\mu_d(K)$ oznaczmy zbiór elementów ciała K, które są rozwiązaniami równania $x^d = 1$, elementy $\mu_d(K)$ nazywamy pierwiastkami z jedności stopnia d w K. Pierwiastek pierwotny stopnia d z definicji nie jest potęgą innego pierwiastka stopnia d.

   (a) Pokaż, że $\mu_d(K)$ jest podgrupą grupy multiplikatywnej ciała K oraz $\mu_r(K)$ jest podgrupą $\mu_d(K)$ o ile r dzieli d.

   (b) Pokaż, że jeśli K jest ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0 to grupa $\mu_d(K)$ jest cykliczna rzędu d.

   (c) Niech $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ bedzie pierwiastkiem pierwotnym stopnia d, znajdź jego stopień nad $\mathbb{Q}$.

10. Załóżmy, że K jest ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki $p > 0$.

    (a) Niech q jest liczbą pierwszą różną od p. Pokaż, że $\mu_{q^r}(K)$ jest grupą cykliczną rzędu q^r dla każdego $r \geq 0$

    (b) Pokaż, że jeśli p nie dzieli n to $\mu_n(K)$ jest grupą cykliczną rzędu n.

    (c) Dla dowolnego $n > 0$ pokaż, że $\mu_n(K)$ jest grupą cykliczną.

11. Niech $K \subset L$ będzie rozszerzeniem skończonym i weźmy $a \in L$. Mnożenie przez a elementów z L wyznacza przekształcenie K-liniowe $L \to L$, przez $Tr(K \subset L)(a)$ oraz $N(K \subset L)(a)$ oznaczmy ślad i wyznacznik tego przekształcenia a odpowiednie przekształcenia z L o wartościach w K oznaczamy $Tr(K \subset L)$ i $N(K \subset L)$ i nazywamy śladem i normą rozszerzenia.

   (a) Załóżmy, że $L = K(a) \supset K$ i $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ jest wielomianem minimalnym dla a. Znajdź $Tr(K \subset L)(a)$ oraz $N(K \subset L)(a)$.

   (b) Pokaż, że $Tr(K \subset L)$ jest funkcjonałem liniowym na L a $N(K \subset L)$ wyznacza homomorfizm grup multiplikatywnych $L^* \to K^*$

   (c) Rozpatrzmy ciąg rozszerzeń skończonych $K \subset L \subset M$; pokaż, ze ślady rozszerzeń dobrze się składają.

   (d) Przy założeniach jak wyżej, definiujemy przekształcenie $T : L \times L \to K$ dla $a, b \in L$ następującym wzorem $T(a,b) = Tr(K \subset L)(ab)$. Pokaż, że T jest funkcjonałem dwuliniowym symetrycznym.

12. Niech $K \subset L$ będzie rozszerzeniem rozdzielczym i skończonym. Niech $\varphi_1, \dots \varphi_m$ będą wszystkimi (różnymi) zanurzeniami K w $\overline{K}$ (nad K).

   (a) Pokaż, że $Tr(K \subset L)(a) = \sum_i \varphi_i(a)$ oraz $N(K \subset L)(a) = \prod_i \varphi_i(a)$.

   (b) Pokaż, że funkcjonał T jest maksymalnej rangi (niezdegenerowany).