Algebra 2*, wiosna 2012, seria VIII

Zadania na 16 kwietnia. Twierdzenie Hilberta o zerach i rozszerzenia ciał. Przypomnijmy, że dla rozszerzenia $k \subset L$, przez $Aut_k(L)$ oznaczamy grupę automorfizmów tego rozszerzenia. Stopień elementu algebraicznego a nad k to stopień rozszerzenia $[k(a) : k]$.
Materiały do tej części wykładu i ćwiczeń znajdą Państwo w rozdziale VII książki Aluffiego *Algebra, Chapter 0.*.

1. Łatwy dowód *Nullstellensatz* dla ciał nieprzeliczalnych. Załóżmy, że K jest nieprzeliczalnym ciałem. Niech $K \subset L$ będzie rozszerzeniem ciał, takim że L jest skończenie generowaną K-algebrą.
   (a) Pokaż, że L ma przeliczalna bazę nad K, wobec czego dla każdego $b \in L \setminus K$ zbiór $\left\{\frac{1}{b-a}\right\}_{a\in K}$ jest liniowo zależny nad K.
   (b) Wykorzystaj liniową zależność powyższych elementów by znaleźć wielomian w $K[x]$, którego pierwiastkiem jest b. Wywnioskuj z tego, że rozszerzenie $K \subset L$ jest skończone.
2. Opisz wszystkie ideały maksymalne w $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Pokaż, że zbiór algebraiczny odpowiadający ideałowi maksymalnemu $\mathfrak{m}$ w $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ jest punktem lub jest pusty. Wskazówka: rozpatrz rozszerzenie $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m}$.
3. Rozpatrzmy ideał $J = (xy + yz + zx, xyz) \triangleleft \mathbb{C}[x, y, z]$. Znajdź nieprzywiedlne składowe zbioru $V(J) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ i podaj ich ideały. Rozstrzygnij czy ideał J jest radykalny.
4. Niech $f \in \mathbb{C}[x, y]$ będzie nierozkładalnym wielomianem drugiego stopnia. Niech $\mathbb{C}[V(f)] = \mathbb{C}[x, y]/(f)$ oznacza pierścień funkcji regularnych na $V(f)$ natomiast $\mathbb{C}(V(f))$ jego ciało ułamków. Pokaż, że $\mathbb{C}[V(f)]$ jest izomorficzny z $\mathbb{C}[t]$ lub $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ z czego wynika, że $\mathbb{C}(V(f))$ jest izomorficzny z $\mathbb{C}(t)$.
5. Rozpatrzmy względnie pierwsze wielomiany $f,\ g \in \mathbb{C}[t]$. Pokaż, że jeśli cztery różne (nieproporcjonalne) kombinacje liniowe (nad $\mathbb{C}$) wielomianów f i g są kwadratami w $\mathbb{C}[t]$ to $f,\ g \in \mathbb{C}$. Wskazówka: dowód niewprost, można założyć, że $f,\ g,\ f - g$ oraz $f - \lambda g$ są kwadratami (gdzie $0 \neq \lambda \neq 1$) oraz minimum stopni f i g jest najmniejsze wśród tych par, które nie spełniają tezy zadania.

6. [Zadanie za dwa punkty.] Niech $F \in \mathbb{C}[x, y]$ będzie nierozkładalnym wielomianem trzeciego stopnia postaci $F = y^2 - x(x-1)(x-\lambda)$ gdzie $0 \neq \lambda \neq 1$

   (a) Pokaż, że $V(F)$ nie można sparametryzować za pomocą funkcji wymiernych; to jest: jeśli $f,\ g \in \mathbb{C}(t)$ takie, że $f^2 = g(g-1)(g-\lambda)$ to $f,\ g \in \mathbb{C}$. Wskazówka: przedstaw $f = r/s$, $g = p/q$ w postaci nieskracalnego ilorazu wielomianów i pokaż, że (z dokładnością do stałej) wielomiany p, q, $p-q$ i $p-\lambda q$ są kwadratami w $\mathbb{C}[t]$.

   (b) Pokaż, że ciało ułamków pierścienia ilorazowego $\mathbb{C}[x, y]/(F)$, czyli $\mathbb{C}(V(F))$, jest wymiaru przestępnego 1 nad $\mathbb{C}$ i nie jest izomorficzne z ciałem funkcji wymiernych $\mathbb{C}(t)$.

   (c) Znajdź wielomian trzeciego stopnia $F \in \mathbb{C}[x, y]$ taki, że $\mathbb{C}(V(F))$ jest izomorficzne z $\mathbb{C}(t)$.

7. Ciało nazywamy prostym, jeśli nie zawiera mniejszego podciała (ciało jest zawsze z jedynką).

   (a) Pokaż, że ciała proste to $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{F}_p$, czyli pierścień $\mathbb{Z}_p$ reszt modulo p, gdzie p jest liczbą pierwszą.

   (b) Pokaż, że każde ciało k zawiera dokładnie jedno ciało proste czyli $\mathbb{Q}$ lub $\mathbb{F}_p$. Charakterystyka ciała k jest równa odpowiednio 0 lub p.

   (c) Niech k będzie ciałem skończonym charakterystyki p. Pokaż, że moc ciała k jest p^n, dla pewnego $n > 0$.

   (d) Pokaż, że w powyższej sytuacji każdy element k jest pierwiastkiem wielomianu $x^{p^n} - x$.

   (e) Pokaż, że dla każdego $n > 0$ istnieje dokładnie jedno ciało mocy p^n, oznaczamy je $\mathbb{F}_{p^n}$.

8. [Errata do lematu z wykładu.] Niech $k \subset k(a)$ będzie rozszerzeniem prostym (pojedyńczym), gdzie a jest elementem algebraicznym nad k z wielomianem minimalnym $f \in k[x]$.

   (a) Pokaż, że rząd grupy $Aut_k(k(a))$ nie przekracza liczby (różnych) pierwiastków wielomianu f (w algebraicznym domknięciu ciała k).

   (b) Pokaż, że rząd grupy $Aut_k(k(a))$ może być istotnie mniejszy niż liczba pierwiastków wielomianu f.

9. Znaleźć stopień następujących elementów algebraicznych nad $\mathbb{Q}$:

   (a) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, (b) $\sqrt[6]{3}+\sqrt{3}$,
   (c) $\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}$, (d) $\sqrt{2}+i$.

10. Niech $a,\ b \in \mathbb{R}$. Pokaż, że liczba $a+bi \in \mathbb{C}$ jest algebraiczna (nad $\mathbb{Q}$) wtedy i tylko wtedy jeśli a i b są algebraiczne.

11. Niech p będzie liczbą pierwszą. Znaleźć stopień (nad $\mathbb{Q}$) liczby $\cos(2\pi/p) + i\sin(2\pi/p)$.