Algebra 2*, wiosna 2012, seria VII

Zadania na 26 marca. Materiał z ostatniego wykładu i więcej zadań (oraz rozwiązania niektórych z podanych poniżej problemów) znajdą Państwo w rozdziale 4 książki Milesa Reida *Undergraduate Commutative Algebra* lub rozdziale 5 książki Atiyah—Macdonald, *Introduction to commutative algebra*.
Jeśli wystarczy czasu (w co wątpię) to możemy wrócić do zadań o niezmiennikach działań grup.

1. Przypomnijmy, że normalizacja dziedziny to jejcałkowite domknięcie w jej ciele ułamków. Pokaż, że normalizacja następujących pierścieni ilorazowych jest izomorficzna z $\mathbb{C}[t]$, gdzie $t = y/x$:
   (a) $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3)$
   (b) $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3 - x^2)$

2. Rozpatrzmy rozszerzenie ciał $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{n})$ gdzie liczba naturalna n nie jest podzielna przez kwadrat liczby całkowitej.
   (a) Pokaż, że jeśli $4 \not| \; n - 1$ to całkowitym domknięciem $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ jest $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.
   (b) Pokaż, że jeśli $4 \mid n - 1$ to całkowitym domknięciem $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ jest $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{n})/2]$.

3. Sprawdź bezpośrednio, że każdy element $k[t]$ jest całkowity nad $k[t^2]$: Dla $f \in k[t]$, $f(t) = \sum a_i t^i$, znajdź wielomian unormowany stopnia 2 nad pierścieniem $k[t^2]$, którego pierwiastkiem jest f.

4. Niech $A \subset B$ będzie całkowitym rozszerzeniem pierścieni. Niech $\mathfrak{p}$ będzie ideałem pierwszym w B a $S \subset A$ pewnym systemem multiplikatywnym w A.
   (a) Pokaż, że pierścień ilorazowy $B/\mathfrak{p}$ jest całkowity nad $A/A \cap \mathfrak{p}$.
   (b) Pokaż, że $\mathfrak{p}$ jest maksymalny w B wtedy i tylko wtedy gdy $A \cap \mathfrak{p}$ jest maksymalny w A.
   (c) Pokaż, że rozszerzenie lokalizacji $S^{-1}A \subset S^{-1}B$ jest całkowite.

5. Niech $A \subset B$ będzie skończonym rozszerzeniem pierścieni.

(a) Pokaż, że dla każdego ideału maksymalnego I w A istnieje co najmniej jeden ideał maksymalny J w B taki, że $J \cap A = I$. Wskazówka: skorzystaj z lematu Nakayamy.

(b) Czy powyższe stwierdzenie jest prawdziwe, jeśli ideały maksymalne zastąpić pierwszymi?

(c) Czy założenie skończoności rozszerzenia $A \subset B$ jest konieczne?

Wskazówka: zob. Atiyah-Macdonald, rodz. 5.

6. Rozpatrzmy grupę skończoną G działającą liniowo na $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ z pierścieniem niezmienników $A^G \subset A$.

   (a) Pokaż, że dla każdego $f \in A$ produkt $\prod_{g \in G}(t - g(f))$ jest wielomianem unormowanym o współczynnikach z A^G, którego pierwiastkiem jest f.

   (b) Pokaż, że rozszerzenie $A^G \subset A$ jest skończone.

7. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym, char $k \neq 2$, połóżmy $A = k[t]$. Dla wielomianu $f \in A$, postaci $f = \prod(t - a_i)^{n_i}$, gdzie $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$ oraz $n_i \geq 1$, weźmy pierścień ilorazowy $B = k[t, x]/(x^2 - f)$ obraz x oznaczając przez $\sqrt{f}$.

   (a) Znajdź warunek na to, żeby B było dziedziną. W następnych pytaniach zakładamy, że B jest dziedziną.

   (b) Pokaż, że całkowite domknięcie A w ciele ułamków (B) jest równe całkowitemu domknięciu B w swoim ciele ułamków.

   (c) Znajdź warunek na to by pierścień B był normalny, to jest całkowicie domknięty w ciele swoich ułamków.

8. Dla ułatwienia $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ oznaczamy przez $\mathbb{N}$. Niech $\Gamma \subset \mathbb{N}^n$ będzie skończenie generowaną podpółgrupą, dla której definiujemy $C(\Gamma) = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ stożek generowany w $\mathbb{R}^n$ przez Γ. Ponadto definiujemy podpierścień $k[\Gamma] \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ rozpięty (jako k-przestrzeń) na jednomianach $x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}$, gdzie $\gamma \in \Gamma$.

   (a) Niech $\overline{\Gamma} = C(\Gamma) \cap \mathbb{Z}^n$. Pokaż, że $\overline{\Gamma} = \{\gamma \in \mathbb{Z}^n | \ \exists m > 0 : m\gamma \in \Gamma\}$.

   (b) Pokaż, że rozszerzenie $k[\Gamma] \subset k[\overline{\Gamma}]$ jest całkowite.

(c) Pokaż, że pierścień $k[\overline{\Gamma}]$ jest całkowicie domknięty w $k[\mathbb{N}^n] = k[x_1, \ldots, x_n]$. Wskazówka: jeśli $f \in k[\mathbb{N}^n]$ spełnia równanie $f^m + a_{m-1}f^{m-1} + \cdots a_1 f + a_0 = 0$, gdzie $a_i \in k[\Gamma]$, i nie wszystkie wykładniki jednomianów w f są w $C(\Gamma)$, to można wybrać formę liniową λ na $\mathbb{R}^n$ taką, że wartość λ na wykładniku dokładnie jednego jednomianu z f jest dodatnia natomiast na pozostałych jednomianach z f oraz na $C(\Gamma)$ forma λ przyjmuje wartości ujemne.

(d) Pokaż, że pierścień $k[\overline{\Gamma}]$ jest normalny.