Algebra 2*, wiosna 2012, seria V

Zadania na 12 marca. Rozkład modułów i ideałów w pierścieniach noetherowskich.

Dla powtórzenia proszę zajrzeć do ksiażki Reida, *Undergraduate Commutative Algebra*; tu jest skan siódmego rozdziału, skąd wziąłem część zadań i gdzie znajdą Państwo również wskazówki a nawet rozwiązania niektórych z nich.

Przypomnienie: Niech M będzie modułem nad pierścieniem A. Nośnik $\operatorname{Supp} M$ to zbiór ideałów pierwszych $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ takich, że lokalizacje $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, natomiast $\operatorname{Ass} M$ to zbiór ideałów pierwszych $\mathfrak{p} \lhd A$ takich, że $A/\mathfrak{p} \subset M$ czyli inaczej $\exists\ m \in M : \operatorname{Ann}(m) = \mathfrak{p}$.

1. Pokaż następujące własności radykału ideału

$$\sqrt{I} = \{a \in A : \exists n > 0 \mid a^n \in I\}$$

   (a) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$

   (b) $\sqrt{I} = A \quad \Rightarrow \quad I = A$

   (c) $\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$

   (d) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$

2. Przypomnijmy, że ideał $q \lhd A$ jest prymarny jeśli jedyne dzielniki zera w $A/\mathfrak{q}$ to nilpotenty.

   (a) Załóżmy, że radykał ideału $\mathfrak{q}$ jest ideałem maksymalnym. Pokaż, że $\mathfrak{q}$ jest prymarny.

   (b) Załóżmy, że $q \lhd A$ spełnia warunek: jeśli $ab \in \mathfrak{q}$ to dla pewnego n mamy $a^n \in \mathfrak{q}$ lub $b^n \in \mathfrak{q}$. Czy $\mathfrak{q}$ jest prymarny? Czy $\sqrt{\mathfrak{q}}$ jest pierwszy? Znajdź odpowiednie przykłady.

3. Niech A będzie dziedziną a M niech będzie skończenie generowanym A-modułem.

   (a) Pokaż, że dla modułów $N \subset M$ mamy $\operatorname{Supp} M = \operatorname{Supp} N \cup \operatorname{Supp}(M/N)$.

   (b) Niech $\operatorname{Ann} M = \{a \in A \mid \forall m \in M : am = 0\}$. Pokaż, że $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathfrak{p} \supset \operatorname{Ann} M$.

(c) Pokaż, że jeśli $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ oraz ideał pierwszym $\mathfrak{q}$ zawiera $\mathfrak{p}$ to $\mathfrak{q} \in \operatorname{Supp} M$.

(d) Pokaż, że $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Supp} M$.

4. Niech $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ jest elementem minimalnym ze względu na inkluzję, to jest $M_\mathfrak{p} \neq 0$ ale jeśli $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ to $M_\mathfrak{q} = 0$.

   (a) Pokaż, że $\operatorname{Ass}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p}\}$

   (b) Pokaż, że $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$

   (c) Pokaż, że $\operatorname{Supp} M = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M} \{\mathfrak{q} : \mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}\}$

   (d) Załóżmy, że $\operatorname{Ann} M = (0)$. Czy $\operatorname{Ass} M = \{(0)\}$?

5. Rozpatrzmy A-moduł M i jego dwa podmoduły M_1 i M_2.

   (a) Pokaż, że jeśli $M = M_1 + M_2$ to $\operatorname{Ass} M \supseteq \operatorname{Ass} M_1 \cup \operatorname{Ass} M_2$ ale niekoniecznie musi zachodzić równość.

   (b) Czy $\operatorname{Ass} M = \operatorname{Ass} M_1 \cup \operatorname{Ass}(M/M_1)$? Odpowiedź uzasadnij.

   (c) Pokaż, że jeśli $M = M_1 \oplus M_2$ to $\operatorname{Ass} M = \operatorname{Ass} M_1 \cup \operatorname{Ass} M_2$

6. Znajdź minimalny rozkład prymarny następujących ideałów oraz pokaż stowarzyszone z nimi ideały pierwsze:

   (a) $(0) \lhd \mathbb{Z}_{36}$

   (b) $(100x^2 - 200x + 100) \lhd \mathbb{Z}[x]$

   (c) $(xy, x - yz) \lhd k[x, y, z]$

   (d) $(x, y) \cdot (x, z) \lhd k[x, y, z]$

   (e) $(x, y)^2 \lhd k[x, y, z]/(xz - y^2)$

7. Pokaż, że $(xy, x - yz) = (y^2, x - yz) \cap (x, z)$ jest minimalnym rozkładem prymarnym w $k[x, y, z]$.

   (a) Niech $h : A \to B$ będzie homomorfizmem pierścieni. Weźmy $\mathfrak{q} \lhd B$ $\mathfrak{p}$-prymarny ideał w B. Pokaż, że $h^{-1}(\mathfrak{q})$ jest $h^{-1}(\mathfrak{p})$-prymarnym ideałem w A.

   (b) Rozpatrzmy odwzorowanie $k[x, y, z] \to k[y, z]$ takie, że $(x, y, z) \mapsto (yz, y, z)$. Pokaż, że powyższy rozkład prymarny w $k[x, y, z]$ można otrzymać cofając rozkład pewnego ideału w $k[y, z]$.

8. Niech $(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ bedzie minimalnym rozkładem prymarnym ideału zerowego w pierścieniu noetherowskim A. Połóżmy $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Pokaż, że zbiór dzielników zera w A jest teoriomnogościową sumą $\mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_r$.

9. Niech $\varphi : M \to M$ będzie homomorfizmem skończenie generowanego A modułu (A jest noetherowski). Pokaż, że dla dostatecznie dużego n mamy $\ker \varphi^n \cap \operatorname{im} \varphi^n = 0$.

10. Rozpatrzmy przypadek $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Przypomnijmy, że ideał $I \triangleleft A$ jest jednomianowy jeśli jest generowany przez jednomiany. Jeśli A interpretować jako k przestrzeń liniową rozpiętą na elementach półgrupy $S = (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ to ideał jednomianowy I można interpretować jako k podprzestrzeń rozpiętą na podzbiorze S postaci $\sum_i (a_i + S)$. Następujące zadania w części dotyczącej efektywnych konstrukcji (algorytmu) zrób dla $n = 2$.

    (a) Znajdź warunek na to, żeby ideał jednomianowy I był pierwszy oraz na to by był prymarny.

    (b) Pokaż, że radykał ideału jednomianowego jest jednomianowy. Znajdź algorytm na liczenie radykału ideału jednomianowego (wyjaśnij na rysunku).

    (c) Pokaż, że rozkład prymarny ideału jednomianowego prowadzi do ideałów jednomianowych. Znajdź algorytm na liczenie rozkładu prymarnego ideału jednomianowego.