Algebra 2*, wiosna 2012, seria IV

Zadania na 5 marca: trochę algebry homologicznej

Materiał do tej serii zadań mogą Państwo znaleźć w książce Eisenbud, *Commutative Algebra* tu jest skan dodatku 3 i w ksiażce Hilton, Stammbach, *A Course in Homological Algebra* na serwerze lib.org.by jest skan

Oznaczenia: A jest pierścieniem przemiennym z jednością i jeśli nie jest powiedziane inaczej, to moduły są zdefiniowane nad A i zwykle oznaczane literami M, N oraz F i G itd.

Kompleksem A-modułów nazywamy ciąg

$$\mathcal{F}: \qquad \cdots \longrightarrow F_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} F_i \xrightarrow{f_i} F_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

lub ciąg

$$\mathcal{G}: \qquad \cdots \longrightarrow G_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} G_i \xrightarrow{g_i} G_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

takie, że $f_i \circ f_{i+1} = 0$, odpowiednio, $g_i \circ g_{i-1} = 0$. Można myśleć o kompleksie jako o "dużym" module $\mathcal{F} = \bigoplus_i F_i$ z endomorfizmem $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ spełniającym warunek $f^2 = 0$.

W sytuacji jak wyżej, definiujemy homologie $\mathrm{H}_i(\mathcal{F}) = \ker f_i / \operatorname{im} f_{i+1}$ lub, odpowiednio, kohomologie $\mathrm{H}^i(\mathcal{G}) = \ker g_i / \operatorname{im} g_{i-1}$. Jak widac, nazewnictwo zależy od kierunku strzałek w stosunku do numeracji. Dalej będziemy zajmować się tylko ciągami ze strzałkami skierowanymi w stronę modułów o mniejszych indeksach, które prowadzą do homologii, przeniesienie definicji i stwierdzeń na kohomologie jest natychmiastowe.

Morfizm kompleksów $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ definiujemy poprzez przemienny diagram homomorfizmów

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}: & \cdots \arrow[r] & F_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "\alpha_{i+1}"'] & F_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & F_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{i-1}"'] & \cdots \\
\mathcal{G}: & \cdots \arrow[r] & G_{i+1} \arrow[r, "g_{i+1}"] & G_i \arrow[r, "g_i"] & G_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

1. Pokaż, że powyższe definicje zadają kategorię kompleksów modułów nad pierścieniem A oraz funktory H_i z tej kategorii do kategorii modułów nad A. W szczególności morfizm kompleksów $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, definiowany powyżej zadaje homomorfizm homologii $\mathrm{H}_i(\alpha) : \mathrm{H}_i(\mathcal{F}) \to \mathrm{H}_i(\mathcal{G})$.

2. Mówimy, że dwa morfizmy kompleksów $\alpha,\ \beta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ są homotopijne jeśli istnieje ciąg homomorfizmów $h_i : F_i \to G_{i+1}$ spełniający warunek $h_{i-1}f_i + g_{i+1}h_i = \alpha_i - \beta_i$ dla każdego i. Pokaż, że wówczas $\mathrm{H}_i(\alpha) = \mathrm{H}_i(\beta)$.

3. Załóżmy, że ciąg morfizmów kompleksów

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

jest dokładny co oznacza, że α_I jest injekcją, β_i jest surjekcją oraz $\operatorname{im}\alpha_i = \ker\beta_i$ dla każdego i.

   (a) Dla $u \in \ker g_i \subset G_i$ wybieramy $v \in F_i$ takie, że $\beta_i(v) = u$. Pokaż, że istnieje $w \in \ker e_i \subset E_{i-1}$ takie, że $\alpha_{i-1}(w) = f_i(v)$. Pokaż, że przyporządkowanie $u \longrightarrow w$ dobrze definiuje homomorfizm $\mathrm{H}_i(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{E})$, który oznaczamy δ_i.

   (b) Pokaż, że następujący ciąg modułów jest dokładny:

$$\mathrm{H}_{i+1}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_{i+1}} \mathrm{H}_i(\mathcal{E}) \xrightarrow{\mathrm{H}_i(\alpha)} \mathrm{H}_i(\mathcal{F}) \xrightarrow{\mathrm{H}_i(\beta)} \mathrm{H}_i(\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_i} \mathrm{H}_{i-1}(\mathcal{E})$$

4. Moduł P nazywamy projektywnym jeśli dla każdego surjektywnego homomorfizmu modułów $\alpha : M \longrightarrow N$ i homomorfizmu $\beta : P \longrightarrow N$ istnieje homomorfizm $\gamma : P \longrightarrow M$ taki, że $\alpha \circ \gamma = \beta$. Pokaż, że projektywność P jest równoważna każdemu z następujących warunków:

   (a) Dla każdego epimorfizmu $\alpha : M \longrightarrow N$ indukowane odwzorowanie $\mathrm{Hom}(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, N)$ jest surjektywne.

   (b) Każde odwzorowanie surjektywne $\alpha : M \longrightarrow P$ rozszczepia się czyli istnieje odwzorowanie $\gamma : P \longrightarrow M$ takie, że złożenie $\alpha \circ \gamma$ jest identycznością na P.

   (c) P jest składnikiem prostym modułu wolnego, to jest istnieje moduł wolny F taki, że $F = P \oplus P'$, dla pewnego modułu P'.

5. Rozpatrzmy dwa kompleksy modułów:

$$\mathcal{F}: \qquad \cdots \xrightarrow{f_3} F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} 0$$

$$\mathcal{G}: \qquad \cdots \xrightarrow{g_3} G_2 \xrightarrow{g_2} G_1 \xrightarrow{g_1} G_0 \xrightarrow{g_0} 0$$

Załóżmy, że kompleks $\mathcal{F}$ składa się z modułów projektywnych oraz $\mathrm{H}_i(\mathcal{G}) = 0$ dla $i > 0$. Niech $M = \mathrm{H}_0(\mathcal{F})$ oraz $N = \mathrm{H}_0(\mathcal{G})$.

(a) Pokaż, że każdy homomorfizm $\beta : M \longrightarrow N$ jest postaci $\beta = \mathrm{H}_0(\alpha)$ dla pewnego odwzorowania kompleksów $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$.

(b) Pokaż, że jeśli odwzorowania kompleksów $\alpha,\ \gamma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ spełniają warunek $\mathrm{H}_0(\alpha) = \mathrm{H}_0(\gamma)$ to są one homotopijne.

Wskazówka: zastosuj indukcję, zob. [Eisenbud, A3.13].

6. Rezolwentą modułu M nazywamy kompleks

$$\mathcal{F} : \qquad \cdots \xrightarrow{f_3} F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} 0$$

w którym $M = \mathrm{H}_0(\mathcal{F})$ oraz $\mathrm{H}_i(\mathcal{F}) = 0$ dla $i > 0$. Jeśli ponadto moduły $\mathcal{F}_i$ są projektywne (lub wolne) to rezolwentę nazywamy projektywną (wolną).

(a) Pokaż, że każdy skończenie generowany moduł nad pierścieniem noetherowskim ma wolna rezolwentę ze skończenie generowanymi modułami.

(b) Pokaż, że każde dwie rezolwenty projektywne danego modułu są homotopijnie równoważne. Dokładniej: jeśli $\mathcal{F}$ i $\mathcal{E}$ to rezolwenty projektywne modułu M to istnieją odwzorowania $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ i $\beta : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ takie, że $\alpha \circ \beta$ jest homotopijne z identycznością na $\mathcal{E}$ a $\beta \circ \alpha$ jest homotopijne z identycznością na $\mathcal{F}$.

Wskazówka: skorzystaj z poprzedniego zadania, zob. [Eisenbud A3.14].

7. Funktor $\Phi : \mathcal{M}od_A \longrightarrow \mathcal{M}od_A$ nazywamy addytywnym jeśli zachowuje dodawanie homomorfizmów. Załóżmy, że $\mathcal{F}$ i $\mathcal{E}$ to rezolwenty projektywne modułu M. Przez $\Phi(\mathcal{F})$ i $\Phi(\mathcal{G})$ oznaczmy kompleksy w $\mathcal{M}od_A$ otrzymane przez zastosowanie funktora Φ.

(a) Pokaż, że istnieje naturalny izomorfizm homologii $\mathrm{H}_i(\Phi(\mathcal{F})) \simeq \mathrm{H}_i(\Phi(\mathcal{G}))$.

(b) Pokaż, że jeśli Φ jest prawo-dokładny to $\mathrm{H}_0(\Phi(\mathcal{F})) = \Phi(M)$.