Algebra 2*, wiosna 2012, seria II

Zadania na 20 lutego, krótki wstęp do kategorii i funktorów.

W tej serii jest dużo zadań ale są (z reguły) łatwe lub bardzo łatwe. Najpierw definicje, które zapewne Państwo znają lub poznać łatwo mogą. Źródeł jest bardzo dużo, na przykład:

- Adamek, Herrlich, Stecker, Abstract and concrete categories.
- Freyd, Abelian Categories

Kategoria. Kategoria $\mathcal{C}$ to klasa obiektów $\mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ oraz klasa morfizmów: dla każdej pary obiektów A, B z $\mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ mamy dany zbiór morfizmów $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$, które zapisujemy jako strzałki $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \ni f : A \to B$. Morfizmy można składać czyli istnieje operacja $\circ_{\mathcal{C}}$:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C) \ni (f,g) \longrightarrow g \circ_{\mathcal{C}} f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

Składanie morfizmów jest łączne oraz w zbiorze $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A)$ mamy wyróżniony morfizm identyczności id_A, który jest neutralny dla operacji składania.

Funktor. To "homomorfizm kategorii" $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, a dokładniej odwzorowanie objektów $\Phi_{\mathrm{Obj}} : \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Obj}_{\mathcal{D}}$ oraz morfizmów: zachowujące kierunek strzałek $\Phi_{\mathrm{Mor}} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\Phi_{\mathrm{Obj}}(A), \Phi_{\mathrm{Obj}}(B))$ (czyli funktor kowariantny) lub je odwracające $\Phi_{\mathrm{Mor}} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\Phi_{\mathrm{Obj}}(B), \Phi_{\mathrm{Obj}}(A))$ (czyli funktor kontrawariantny). Zakładamy, że funktory przeprowadzają identyczności na identyczności oraz są zgodne ze składaniem morfizmów.

Naturalna transformata funktorów. Załóżmy, że mamy dwa kowariatne funktory $\Phi,\ \Psi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Naturalna transformata funktorów $\mu : \Phi \to \Psi$ jest zadana przez klasę morfizmów $\mu_A : \Phi_{\mathrm{Obj}}(A) \to \Psi_{\mathrm{Obj}}(A)$, gdzie $A \in \mathcal{C}$, które dla każdej pary $A, B \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ i $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ spełniają warunek przemienności

$$\begin{tikzcd}
\Phi_{\mathrm{Obj}}(A) \arrow[r, "\Phi_{\mathrm{Mor}}(f)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & \Phi_{\mathrm{Obj}}(B) \arrow[d, "\mu_B"] \\
\Psi_{\mathrm{Obj}}(A) \arrow[r, "\Psi_{\mathrm{Mor}}(f)"] & \Psi_{\mathrm{Obj}}(B)
\end{tikzcd}$$

Jeśli dodatkowo każde μ_A jest izomorfizmem to mówimy, że μ jest naturalną równoważnością (lub izomorfizmem) funktorów. Takie same definicje stosujemy dla funktorów kontrawariantnych.

Izomorfizm i równoważność kategorii. Kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ są izomorficzne o ile istnieją funktory $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $\Psi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ takie, że $\Phi \circ \Psi$ oraz $\Psi \circ \Phi$ są funktorami identyczności na, odpowiednio, $\mathcal{D}$ i $\mathcal{C}$. Kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ są równoważne o ile istnieją funktory Φ i Ψ takie, że $\Phi \circ \Psi$ oraz $\Psi \circ \Phi$ są naturalnie równoważne z funktorami identyczności.

1. Pokaż, że zbiory oraz struktury algebraiczne (grupy, grupy abelowe, pierścienie przemienne, przestrzenie wektorowe nad ustalonym ciałem k itd) i przestrzenie topologiczne wraz z ich odwzorowaniami, odpowiednimi homomorfizmami, tworzą kategorie. Oznaczamy je $\mathcal{S}et$, $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{R}ing$, $\mathcal{V}ect_k$, $\mathcal{T}op$ itd. Pokaż, że zapominanie o operacjach algebraicznych daje funktor pomiędzy odpowiednimi kategoriami (funktor zapominania).

2. Pokaż, że kategoria z jednym obiektem jest monoidem (półgrupą z jednością) a funktory takich kategorii to ich homomorfizmy.

3. Funktor $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ nazywamy wiernym (odpowiednio, pełnym) jeśli odwzorowanie na strzałkach $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\Phi_{\mathrm{Obj}}(A), \Phi_{\mathrm{Obj}}(B))$ jest injekcją (surjekcją). Pokaż, że abelianizacja grupy zadaje funktor kowariantny z $\mathcal{G}r$ do $\mathcal{A}b$. Czy jest to funktor wierny? pełny?

4. Zdefiniuj izomorfizm obiektów oraz odwrotność morfizmu w sposób kategoryjny.

5. Niech $(S, \leq)$ bedzie zbiorem z częściowym porządkiem. Pokaż, że $(S, \leq)$ definiuje kategorię, której obiektami są elementy z S a morfizmami nierówności pomiędzy nimi.

6. Obiekt A nazywamy obiektem początkowym kategorii $\mathcal{C}$ jeśli ma dokładnie jedno odwzorowanie w każdy obiekt kategorii. Podobnie definiujemy obiekt końcowy kategorii. Pokaż, że obiekt początkowy (końcowy) w kategorii jest jeden z dokładnością do izomorfizmu. Zbadaj czy kategorie rozpatrywane w pozostałych zadaniach mają obiekt początkowy. Czy mają obiekt końcowy?

7. Niech $\mathcal{C}$ bedzie kategorią z wyróżnionym obiektem A. Pokaż, że odwzorowanie $B \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ oraz

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \ni f \longrightarrow (\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \ni g \to f \circ g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)\ )$$

definiuje kowariantny funktor z $\mathcal{C}$ w kategorię zbiorów $\mathcal{S}et$. Oznaczmy go $\mathfrak{h}_A : B \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Zdefiniuj podobnie funktor kontrawariantny $\mathfrak{h}^A : B \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$. Pokaż, że morfizm $A' \to A$ daje naturalną transformatę funktorów $\mathfrak{h}_A \to \mathfrak{h}_{A'}$ i $\mathfrak{h}^{A'} \to \mathfrak{h}^A$.

8. Lemat Yonedy. Dla danej kategorii $\mathcal{C}$ definiujemy jej kategorię funktorów $\widehat{\mathcal{C}}$, w której obiektami są funktory kontrawariantne $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ a morfizmami naturalne transformaty takich funktorów. Rozpatrzmy funktor $\widehat{\Phi} : \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ taki, że $\widehat{\Phi}_{\mathrm{Obj}}(A) = \mathfrak{h}_A$ a na morfizmach $\widehat{\Phi}$ działa tak jak opisano w poprzednim zadaniu. Pokaż, że $\widehat{\Phi}$ jest wierny i pełny.

9. Kontrawariantny funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ nazywamy reprezentowalnym (reprezentowanym przez obiekt A w $\mathcal{C}$) jeśli jest naturalnie izomorficzny funktorowi $\mathfrak{h}^A$. Pokaż, że kowariantny funktor zapominania $\mathcal{A}b \to \mathcal{S}et$ jest naturalnie izomorficzny funktorowi $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$.

10. Niech $\mathcal{V}ect_k^{<\infty}$ oznacza kategorię przestrzeni wektorowych nad ciałem k wymiaru skończonego. Rozpatrzmy funktor kowariantny podwójnej dualizacji $\cdot^{\vee\vee} : \mathcal{V}ect_k^{<\infty} \to \mathcal{V}ect_k^{<\infty}$. Znaleźć naturalną transformatę funktora identyczności do podwójnej dualizacji i pokazać, że na $\mathcal{V}ect_k^{<\infty}$ jest to równoważność funktorów.

11. Niech $vect_k^{<\infty}$ oznacza kategorię, której obiektami są przestrzenie liniowe k^n (jeden obiekt dla każdego $n \geq 0$) zaś $\mathrm{Mor}_{vect}(k^n, k^m)$ to macierze $n \times m$. Pokaż, że naturalne włożenie $vect_k^{<\infty}$ w $\mathcal{V}ect_k^{<\infty}$ oraz, z drugiej strony, wybór (pewnej) bazy dla każdej przestrzeni w $\mathcal{V}ect_k^{<\infty}$, daje równoważność tych kategorii.

12. Produkt kategoryjny $A,\ B \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$ to obiekt D z dwoma morfizmami $A \leftarrow D \to B$ takimi, że dla dowolnego obiektu D', który ma morfizmy $A \leftarrow D' \to B$ istnieje dokładnie jeden morfizm z D' do D, który daje następujący przemienny diagram

$$\begin{tikzcd} & D' \arrow[ddl] \arrow[ddr] \arrow[d, dotted, "\exists!"] & \\ & D \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

Produkt D oznaczamy, o ile nie spowoduje to konfuzji, przez $A \times B$. Ko-produkt definiujemy przez odwrócenie strzałek. Pokaż, że tak zdefiniowany produkt jest jeden z dokładnością do izomorfizmu. Pokaż, że produkty są przemienne, to jest $A \times B$ jest izomorficzne z $B \times A$. Opisz produkty i koprodukty w kategoriach $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{G}r$, $\mathcal{R}ing$ (zauważ, że niekoniecznie muszą istnieć).

13. Załóżmy, że w kategorii $\mathcal{C}$ mamy trzy obiekty z następującymi dwoma strzałkami $A \to C \leftarrow B$. Produktem włóknistym A i B nad C nazywamy obiekt D z morfizmami $A \leftarrow D \to B$, które dają następujący diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Ponadto zakładamy, że o ile obiekt D' spełnia powyższy warunek dla D to mamy dokladnie jeden morfizm $D' \to D$, który można wstawić w następujący diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[dr, dotted, "\exists!"'] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & D \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ & A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Tak zdefiniowany produkt włóknisty (o ile wiemy, gdzie jest zdefiniowany) zwykle oznaczamy przez $A \times_C B$. Ko-produkt włóktnisty definiujemy przez odwrócenie strzałek. Pokaż, że tak zdefiniowany produkt (i ko-produkt) jest jeden z dokładnością do izomorfizmu. Opisz produkty i koprodukty włókniste w kategoriach $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{A}b$. Pokaż, że jeśli kategoria $\mathcal{C}$ ma obiekt końcowy Z i istnieje w niej produkt $A \times B$ to produkt włóknisty $A \times_Z B$ jest izomorficzny z $A \times B$.

14. Złożenie produktów włóknistych jest produktem włóknistym. Załóżmy, że następujące obiekty i strzałki są zdefiniwane

$$\begin{tikzcd} E \times_A (A \times_C B) \arrow[r] \arrow[d] & A \times_C B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ E \arrow[r] & A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Pokaż, że $E \times_A (A \times_C B)$ jest izomorficzne z $E \times_C B$, gdzie $E \to C$ to złożenie $E \to A \to C$.

15. Zmiana bazy produktu włóknistego. Załóżmy, że istnieje produkt włóknisty dla $A \to C \leftarrow B$. Pokaż, że dowolny morfizm $C \to E$ indukuje naturalne odwzorowanie $A \times_C B \to A \times_E B$ i mamy diagram

$$\begin{tikzcd}
A \times_C B \arrow[r] \arrow[d] & A \times_E B \arrow[d] \\
C \arrow[r] & C \times_E C
\end{tikzcd}$$

gdzie odwzorowanie $C \to C \times_E C$ jest diagonalą czyli odwzorowaniem w produkt włóknisty pochodzącym z dwóch kopii identyczności $C \to C$. Pokaż, że powyższy diagram też jest produktem włóknistym.