Algebra 2*, wiosna 2012, seria XIV

Zadania na 4 czerwca. Przypomnijmy, że waluacja *dyskretna* na ciele K to funkcja $\mu : K^* \to \mathbb{Z}$, która jest homomorfizmem suriektywnym grup (K^* jest grupą multiplikatywną elementów niezerowych ciała K) i spełnia warunek $\mu(a+b) \geq \min\{\mu(a),\ \mu(b)\}$. Alternatywnie, $\mu : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ gdzie kładziemy $\mu(a) = \infty \iff a = 0$. Definiujemy pierścień waluacji $A = \{a \in K : \mu(a) \geq 0\}$ z ideałem maksymalnym $\mathfrak{m} = \{a \in K : \mu(a) > 0\}$. Ciało $k = A/\mathfrak{m}$ nazywamy ciałem reszt (rezidualnym) tej waluacji.

1. Pokaż, że z warunków na waluację μ wynika, że jeśli $\mu(a) \neq \mu(b)$ to $\mu(a+b) = \min\{\mu(a),\ \mu(b)\}$.

2. (a) Niech p będzie liczbą pierwszą. Pokaż, że odwzorowanie $\mu_p : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ zdefiniowane wzorem $\mu_p(a) = \max\{n \geq 0 : p^n | a\}$ rozszerza się do waluacji na $\mathbb{Q}$ (nazywamy ją waluacją p-adyczną). Znajdź pierścień tej waluacji i ciało rezidualne.

   (b) Dla niezerowego wielomianu $f \in k[t]$, takiego że $f = \sum_i a_i t^i$, połóżmy $\mu_t(f) = \min\{i : a_i \neq 0\}$. Pokaż, że odwzorowanie $\mu_t : k[t] \to \mathbb{Z}$ rozszerza sie do waluacji na ciele ułamków $k(t)$ i znajdź pierścień, i ciało rezidualne tej waluacji.

   (c) Uogólnij powyższe dwa przykłady na przypadek dziedziny ideałów głównych A z ideałem pierwszym $\mathfrak{p} = (p)$: pokaż, że wybór $\mathfrak{p}$ definiuje waluację $\mu_p : A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$, znajdź pierścień waluacji i ciało rezidualne.

3. Niech A bedzie pierścieniem waluacji dyskretnej z ideałem maksymalnym $\mathfrak{m} = (t)$. Mówimy, że ciąg elementów $(a_i)_{i\geq 0}$ jest $\mathfrak{m}$-adycznym ciągiem Cauchy'ego jeśli dla każdego $i \geq 0$ istnieje takie $n_0 > 0$, takie że dla dowolnych $n_1,\ n_2 \geq n_0$ zachodzi $a_{n_1} - a_{n_2} \in \mathfrak{m}^i$. Na ciągach Cauchy'ego w A definiujemy relację $(a_i) \sim (b_i)$ regułą $\forall i\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 \mid a_n - b_n \in \mathfrak{m}^i$. Zbiór klas abstrakcji tej relacji (równoważności!) oznaczamy $\widehat{A}$ i nazywamy *uzupełnieniem* A.

   (a) Pokaż, że $\widehat{A}$ jest pierścieniem z naturalnie zdefiniowanymi operacjami.

   (b) Pokaż, że $\widehat{A}$ jest pierścieniem waluacji z ideałem maksymalnym $\widehat{\mathfrak{m}} = t \cdot \widehat{A}$. Znajdź jego ciało rezidualne.

(c) Znajdź uzupełnienie pierścieni z zadania 2 (a) i (b).

4. Formalny szereg Laurenta o współczynnikach w ciele k to wyrażenie postaci $f = \sum_{i \geq i_0} a_i t^i$ gdzie $i_0 \in \mathbb{Z}$ zaś $a_i \in k$.

   (a) Pokaż, że na zbiorze szeregów Laurenta można naturalnie zdefiniować strukturę ciała; będziemy to ciało oznaczać $k((t))$.

   (b) Dla f jak wyżej kładziemy $\mu(f) = i_0$ gdzie i_0 najmniejsze i takie, że $a_i \neq 0$. Ponadto $\mu(0) = \infty$. Pokaż, że $\mu : k((t)) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ jest waluacją dyskretną, znajdź jej pierścień waluacji i ciało rezidualne.

5. Formalny szereg Puiseux o współczynnikach w ciele k to wyrażenie postaci $f = \sum_{i \geq i_0} a_i t^{i/n}$ gdzie n jest dodatnią liczbą naturalną, $i_0 \in \mathbb{Z}$ zaś $a_i \in k$. Zbiór formalnych szeregów Puiseux oznaczamy $k\{\{t\}\}$; zauważmy, że $k\{\{t\}\} = \bigcup_{n>0} k((t^{1/n}))$.

   (a) Pokaż, że na zbiorze $k\{\{t\}\}$ można naturalnie zdefiniować strukturę ciała.

   (b) Dla f jak wyżej kładziemy $\mu(f) = i_0/n$ gdzie i_0 najmniejsze i takie, że $a_i \neq 0$; ponadto $\mu(0) = \infty$. Pokaż, że funkcja $\mu : k((t)) \to \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ spełnia warunki $\mu(f \cdot g) = \mu(f) + \mu(g)$ oraz $\mu(f + g) \geq \min\{\mu(f), \mu(g)\}$. Takie μ będziemy nazywać waluacją *wymierną*.

   (c) Sprawdź, że $A = \{f \in k\{\{t\}\} : \mu(f) \geq 0\}$ jest pierścieniem lokalnym z ideałem maksymalnym $\mathfrak{m} = \{f \in k\{\{t\}\} : \mu(f) > 0\}$.

   (d) Czy A jest pierścieniem noetherowskim?

6. Rozpatrzmy półpierścień tropikalny $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \infty, 0, \oplus, \odot)$ gdzie ∞ jest elementem neutralnym dla dodawania tropikalnego $a \oplus b = \min(a,\ b)$ oraz 0 jest elementem neutralnym dla mnożenia tropikalnego $a \odot b = a + b$ (w tym półpierścieniu nie ma odejmowania).

   Tropikalną ewaluacją wielomianu $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ (tropikalną funkcją wielomianową lub, po prostu, wielomianem tropikalnym) będziemy nazywać odwzorowanie $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, w którym wartość $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest liczona w sposób tropikalny (za pomocą arytmetyki tropikalnej w miejsce zwykłej).

(a) Pokaż, że funkcja $\hat{f}$ jest ciągła, wklęsła, kawałkami liniowa — a dokładniej, że istnieje pokrycie skończone $\mathbb{R}^n$ zbiorami, na których $\hat{f}$ jest funkcją liniową o dodatnich całkowitych współczynnikach.

(b) Czy każde funkcja $\hat{f}$ spełniająca warunki z poprzedniego punktu jest tropikalną funkcją wielomianową?

7. Niech K będzie ciałem z waluacją $\mu : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, której obraz jest gęsty w $\mathbb{R}$. Przez $t \in K$ oznaczmy element taki, że $\mu(t) = 1$: na przykład $K = k\{\{t\}\}$ z zadania 5.

   Tropikalizacją zbioru $V \subset (K^*)^n$ nazywamy domknięcie zbioru $\{(\mu(x_1), \dots, \mu(x_n)) : (x_1, \dots, x_n) \in V\} \subset \mathbb{R}^n$. Znajdź tropikalizację prostej $tx_1 + 5t^2x_2 + t^3 = 0$.

   Wskazówka: rozpatrz różne parametryzacje prostej, wynik powinien wyglądać jak na rysunku poniżej. Więcej informacji zob. np. wykłady Diany Maclagan.