Algebra 2*, wiosna 2012, seria XIII

Zadania przygotowawcze do kolokwium, które ma się odbyć 28 maja.

1. Niech $\mathbb{Z}_K$ będzie całkowitym domknięciem $\mathbb{Z}$ w pewnym ciele K, które jest skończonym rozszerzeniem $\mathbb{Q}$. Wykazać, że $\mathbb{Z}_K$ jako grupa addytywna jest skończenie generowaną grupą wolną i policz jej rangę jako $\mathbb{Z}$ modułu w zależności od stopnia rozszerzenia $[K : \mathbb{Q}]$.

2. Niech K będzie ciałem rozkładu wielomianu $x^4 - 7 \in \mathbb{Q}[x]$. Opisać grupę $Aut(K/\mathbb{Q})$, jej podgrupy i odpowiadające im rozszerzenia ciał:

   (a) dla każdego ciała pośredniego $\mathbb{Q} \subset L \subset K$ znaleźć podgrupę $Aut(K/L) < Aut(K/\mathbb{Q})$, podać jej rząd i opisać z dokładnością do izomorfizmu; wykonać diagram inkluzji ciał i odpowiadających im grup Galois;

   (b) dla podciała właściwego $L \subset K$ zbadać kiedy rozszerzenie $\mathbb{Q} \subset L$ jest normalne i jeśli tak, to znaleźć $Aut(L/\mathbb{Q})$ i podać wielomian $f_L \in \mathbb{Q}[x]$, taki że L jest jego ciałem rozkładu.

   (c) Zrób powyższe dwa punkty dla roszerzenia $\mathbb{Q}(i) \subset K$.

3. Pokaż, że następujące rozszerzenia są Galois i policz grupę automorfizmów każdego z nich:

   (a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$

   (b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3 + \sqrt{5}})$

4. Niech $\mathbb{Q} \subset L$ będzie rozszerzeniem skończonym stopnia d. Pokazać, że jeśli d jest liczbą nieparzystą i rozszerzenie to jest Galois to $L \subset \mathbb{R}$. Czy stwierdzenie to pozostanie prawdziwe jeśli nie założymy, że $\mathbb{Q} \subset L$ jest rozszerzeniem Galois?

5. Pokazać, że jeśli stopień wielomianu $f \in \mathbb{Q}[x]$ nie przekracza 4 to równianie $f(x) = 0$ jest rozwiązalne przez pierwiastniki. [1]

[1] Wielomian $f \in k[x]$ (lub równienie $f(x) = 0$) jest rozwiązalny (rozwiązalne) przez pierwiastniki jeśli jego ciało rozkładu jest zawarte w ciele $k(a_1, \ldots, a_r)$, gdzie ciąg rozszerzeń $k \subset k(a_1) \subset k(a_1, a_2) \subset \cdots \subset k(a_1, \ldots, a_r)$ spełnia warunek: $a_{i+1}^{m_i} \in k(a_1, \ldots, a_i)$, dla $i = 0, \ldots, r-1$ i pewnych liczb naturalnych m_i.

6. Pokazać, że równanie $x^5 - 2px - p = 0$, gdzie p jest liczbą pierwszą, nie jest rozwiazalne przez pierwiastniki nad $\mathbb{Q}$ (wskazówka: skorzystaj z zadań 1 i 2 z serii XII).

7. Rozpatrzmy wielomian stopnia $n \geq 3$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$, którego współczynniki spełniają warunek $a_i = a_{n-i}$ dla $i = 0, \ldots, n$. Pokaż, że jeśli a jest pierwiastkiem f to i a^{-1} też jest pierwiastkiem f. Pokaż, że f jest rozwiązalne przez pierwiastniki o ile $n \leq 9$.

8. Dowieść, że jeśli grupa Galois wielomianu $f \in \mathbb{Q}[x]$ jest nierozwiązalna to i grupa wielomianu $f(x^n) \in \mathbb{Q}[x]$ jest nierozwiązalna.

9. Niech $f \in k[x]$ będzie wielomianem rozdzielczym stopnia n a $L \supset k$ jego ciałem rozkładu. Załóżmy, że $Aut_k(L) = S_n$. Pokaż, że jeśli $a \in L$ jest pierwiastkiem f to $Aut_{k(a)}(L) = S_{n-1}$. Pokaż, że rozszerzenie $k \subset k(a)$ nie ma nietrywialnych rozszerzeń pośrednich.

10. Niech a_1, a_2 i a_3 będą pierwiastkami wielomianu $x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Wyznaczyć wielomian, którego pierwiastkami są

    (a) $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, $a_3 + a_1$,

    (b) a_1^2, a_2^2, a_3^2,

11. Załóżmy, że $char K = 0$ oraz nierozkładalny wielomian $f \in K[t]$ stopnia d ma pierwiastki $x_1, \ldots, x_d$ w $\overline{K}$. Definiujemy wyróżnik $\Delta_f = \prod_{i \neq j}(x_i - x_j)$.

    (a) Pokaż, że dla $d = 3$ grupa Galois ciała rozkładu f jest $\mathbb{Z}_3$ jeśli $\sqrt{\Delta_f} \in K$ i jest równa S_3 w przeciwnym przypadku.

    (b) Jeśli $d = 4$ to definiujemy wielomian $g_f = (t - (x_1x_2 + x_3x_4))(t - (x_1x_3 + x_2x_4))(t - (x_1x_4 + x_2x_3))$. Pokaż, że $g_f \in K[t]$ oraz, że jeśli f i g_f nie mają pierwiastków w K to grupa Galois f jest A_4 lub S_4 w zależności od tego czy $\sqrt{\Delta} \in K$. Znajdź zależność ciał rozkładu tych wielomianów oraz ich grup Galois.

12. Dla każdej grupy G rzędu ≤ 6 znajdź rozszerzenie Galois $\mathbb{Q} \subset K$, którego grupa automorfizmów jest izomorficzna z G.

13. Załóżmy, że $char K \neq 2$ i rozpatrzmy rozszerzenie $K \subset L$ stopnia 2^n. Pokaż, że każdy element ciała L wyraża się przez pierwiastniki kwadratowe nad ciałem K, czyli istnieje ciag rozszerzeń $k \subset k(a_1) \subset k(a_1, a_2) \subset \cdots \subset k(a_1, \ldots, a_r)$ spełniających warunek: $a_{i+1}^2 \in k(a_1, \ldots, a_i)$, dla $i = 0, \ldots, r-1$.

14. Niech K będzie ciałem charakterystyki $p > 0$. Załóżmy, że wielomian $x^p - a \in K[x]$ jest nierozkładalny nad K i przez L oznaczmy jego ciało rozkładu. Bezpośrednio z definicji policz odwzorowanie $Tr(K \subset L) : L \to K$.