**Algebra 2*, wiosna 2012, seria XII**

Zadania na 21 maja. Z poprzedniej serii spróbujemy jeszcze zrobić zadania 6, 7, 8. Przypomnijmy, że grupa Galois wielomianu to grupa automorfizmów rozszerzenia do ciała rozkładu tego wielomianu, $S_n$ to grupa permutacji.

1. Niech $p$ będzie liczbą pierwszą oraz $G < S_p$ podgrupą rozwiązalną, która działa przechodnio (tranzytywnie) na zbiorze $[p] = \{1, \ldots, p\}$ (przy działaniu naturalnym).
   (a) Pokaż, że każda z (nietrywialnych) grup w ciągu podgrup rozwiązujących $G$ działa przechodnio na zbiorze $[p]$.
   (b) Pokaż, że $G$ zawiera dokładnie jedną podgrupę cykliczną rzędu $p$ (i jest to dzielnik normalny).
   (c) Pokaż, że każdy nietrywialny element $G$ ma co najwyżej jeden punkt stały.
2. Niech wielomian $f \in K[x]$ będzie nierozkładalny stopnia $p$ będącego liczbą pierwszą. Pokazać, że jeśli grupa Galois wielomianu $f$ jest rozwiązalna to dla dowolnego rozszerzenia $K \subset L$ wielomian $f$ ma w $L$ dokładnie 0 lub 1, lub $p$ pierwiastków.
3. Rozpatrzmy ciało $K$ takie, że $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$, niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Dowiedź następujących stwierdzeń.
   (a) Jeśli wszystkie pierwiastki wielomianu
   $$f = x^n + a_3x^{n-3} + a_4x^{n-4} + \cdots + a_n \in K[x]$$
   są rzeczywiste to $f = x^n$.
   (b) Jeśli $f \in K[x]$ jest wielomianem nierozkładalnym stopnia $p$, który ma dokładnie $p-2$ pierwiastki rzeczywiste to jego grupa Galois jest $S_p$.
4. Pokaż, że każde rozszerzenie ciał skończonych jest Galois i jego grupa automorfizmów jest cykliczna.
5. *Satz 90 Hilberta.* Niech $K \subset L$ będzie rozszerzeniem rozdzielczym i skończonym z normą i śladem $N(K \subset L)$ i $Tr(K \subset L)$ zdefiniowanymi w serii IX.

(a) Pokaż, że dla każdego $g \in Aut_K(L)$ i $a \in L$ zachodzi $N(K \subset L)(a/g(a)) = 1$ oraz $Tr(K \subset L)(a - g(a)) = 0$.

(b) Załóżmy dodatkowo, że $K \subset L$ jest rozszerzeniem Galois z $Aut_K(L) = \mathbb{Z}_d = \langle\ g\ \rangle$. Niech $a \in L$ spełnia warunek $N(K \subset L)(a) = 1$. Pokaż, że istnieje $b \in L$ takie, że $a = b/g(b)$. Wskazówka: z twierdzenia Dedekinda istnieje $c \in L$ takie, że $b = c + ag(c) + ag(a)g^2(c) + \cdots + ag(a)\cdots g^{d-2}(a)g^{d-1}(c) \neq 0$.

(c) Przy założeniach o $K \subset L$ jak wyżej pokaż, że jeśli $Tr(K \subset L)(a) = 0$ to istnieje $b \in L$ takie, że $a = b - g(b)$.

6. Skorzystaj z powyższego twierdzenia dla rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i)$ by pokazać, że każda trójka liczb całkowitych $(a, b, c)$ spełniająca równanie $a^2+b^2 = c^2$ jest proporcjonalna do trójki $(r^2-s^2, 2rs, r^2+s^2)$ dla pewnej pary liczb całkowitych $(r, s)$.

7. *Nullstellensatz dla ciał niedomkniętych.* Rozpatrzmy algebraiczne domknięcie $\overline{k}$ ciała $k$ charakterystyki zero. O rozszerzeniu $k \subset \overline{k}$ zakładamy, że jest skończone z grupą Galois $G$. Mamy naturalne włożenie $k[x_1, \ldots, x_n] \subset \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Weźmy ideał $I \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$. Zbiór $\overline{k}$-punktów ideału $I$ to

$$V_{\overline{k}}(I) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \overline{k}^n :\ \forall f \in I \quad f(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$$

(a) Pokaż, że działanie grupy $G$ na $\overline{k}$ indukuje działanie diagonalne $G$ na $\overline{k}^n$, które zachowuje zbiór $V_{\overline{k}}(I)$.

(b) Pokaż, że każdy ideał maksymalny $m \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ zawierający $I$ jest postaci $m = k[x_1, \ldots, x_n] \cap (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ gdzie $(a_1, \ldots, a_n) \in V_{\overline{k}}(I)$.

(c) Pokaż, że mamy bijekcję pomiędzy ideałami maksymalnymi w $k[x_1, \ldots, x_n]$ zawierający $I$ a orbitami działania $G$ na $V_{\overline{k}}(I)$.

8. Znajdź ideały maksymalne zawierające podany ideał

(a) $(x^2 + y^2) \triangleleft \mathbb{R}[x, y]$

(b) $(x^2 + y^2) \triangleleft \mathbb{Q}[x, y]$