Algebra 2*, wiosna 2012, seria XI

Zadania na 14 maja. Materiały do tej serii zadań m.in. w rozdziale VII książki Aluffiego *Algebra, Chapter 0.* oraz w książce *Fields and Galois theory* Milnego. Jak zwykle p oznacza liczbę pierwszą.

1. Niech $K \subset L$ będzie rozszerzeniem ciał skończonych mocy q i q^m, gdzie $q = p^n$. Pokaż, że grupa automorfizmów tego rozszerzenia jest cykliczna i generowana przez Φ^n, gdzie Φ jest homomorfizmem Frobeniusa zdefiniowanym w serii IX. Znajdź ciała pośrednie tego rozszerzenia i odpowiadające im podgrupy grupy automorfizmów.

2. Niech $\mu_d \in \mathbb{C}$ będzie pierwiastkiem pierwotnym stopnia d z jedności.

   (a) Pokaż, że rozszerzenie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\mu_d)$ jest Galois.

   (b) Pokaż, że grupa automorfizmów ciała $\mathbb{Q}(\mu_d)$ jest przemienna oraz jeśli d jest liczbą pierwszą to jest cykliczna.

   (c) Wyznaczyć stopień rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\mu_d)$ oraz jego grupę automorfizmów $\mathbb{Q}(\mu_d)$ dla $d = 4,\ 5,\ 6,\ 8$.

   (d) Zilustrować zasadnicze twierdzenie teorii Galois dla rozszerzeń podanych powyżej: podać ciała pośrednie i odpowiadające im podgrupy grupy Galois.

3. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania.

   (a) Pokaż, że rozszerzenie $\mathbb{Q}(\mu_d)(t^d) \subset \mathbb{Q}(\mu_d)(t)$ jest Galois i znajdź jego grupę automorfizmów; t oznacza tu zmienną lub element przestępny nad $\mathbb{Q}$.

   (b) Pokaż, że dla dowolnego całkowitego $a > 1$ rozszerzenie $\mathbb{Q}(\mu_d) \subset \mathbb{Q}(\mu_d)(\sqrt[d]{a})$ jest Galois; czy jego grupa Galois jest cykliczna? (Na początek można założyć, że a nie dzieli się przez kwadrat liczby pierwszej.)

4. Niech $K \supset \mathbb{Q}$ będzie ciałem rozkładu unormowanego wielomianu nierozkładalnego $f \in \mathbb{Q}[x]$ stopnia d, którego pierwiastki oznaczamy przez $x_1, \ldots, x_d$.

   (a) Pokaż, że grupa automorfizmów rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset K$ jest podgrupą grupy permutacji S_n, która działa tranzytywnie na pierwiastkach $\{x_1, \ldots, x_d\}$.

(b) Wyróżnikiem wielomianu f nazywamy liczbę zespoloną $\Delta_f = \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2$. Pokaż, że liczba Δ_f jest zawsze wymierna i policz ją w zależności od współczynników f dla $d = 2$ i 3 (zob. zad. 2, seria VI).

(c) Pokaż, że dla $d = 3$ grupa automorfizmów rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset K$ jest równa albo S_3, albo $\mathbb{Z}_3$, w zależności od tego czy liczba $\sqrt{\Delta_f}$ jest wymierna.

5. Opisać grupę Galois rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset L$, gdzie L jest ciałem rozkładu wielomianu $f \in \mathbb{Q}[x]$ podanego poniżej; podać ciała pośrednie tego rozszerzenia oraz odpowiadające im podgrupy grupy Galois; które z pośrednich rozszerzeń są normalne?

(a) $f = x^3 - x - 1$, (b) $f = x^4 + 2$,
(c) $f = x^5 - 5$, (d) $f = x^4 + x^2 + 1$

6. Rozpatrzmy ciała pośrednie M_1 i M_2 rozszerzenia $K \subset L$.

(a) Czy jeśli $K \subset M_i$, gdzie $i = 1,\ 2$, są rozszerzeniami Galois to $K \subset M_1 \cap M_2$ też jest Galois?

(b) Czy jeśli $M_i \subset L$, gdzie $i = 1,\ 2$, są rozszerzeniami Galois to $M_1 \cap M_2 \subset L$ też jest Galois?

(c) Czy jeśli $K \subset M_i$, gdzie $i = 1,\ 2$, są rozszerzeniami Galois to $K \subset M_1 \cdot M_2$ też jest Galois?

(d) Czy jeśli $M_i \subset L$, gdzie $i = 1,\ 2$, są rozszerzeniami Galois to $M_1 \cdot M_2 \subset L$ też jest Galois?

7. Niech $K \subset L$ będzie rozszerzeniem algebraicznym ciał. Na grupie $Aut(L/K)$ definiujemy topologię Krulla za pomocą bazy

$$U(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r) = \{g \in Aut(L/K) \mid \ \forall i : g(a_i) = b_i\}$$

gdzie $a_i,\ b_i \in L$ zaś r jest dowolne.

(a) Pokaż, że ta definicja daje topologię Hausdorffa na $Aut(L/K)$ oraz działania grupowe są ciągłe w tej topologii.

(b) Pokaż, że dla dowolnego rozszerzenia pośredniego $K \subset M \subset L$ grupa $Aut(L/M) \subset Aut(L/K)$ jest pod grupą domkniętą oraz, jeśli ponadto $[M : K] < \infty$ to jest również podgrupą otwartą.

8. W sytuacji poprzedniego zadania załóżmy ponadto, że rozszerzenie $K \subset L$ jest normalne i rozdzielcze (czyli Galois).

   (a) Weźmy rozszerzenie pośrednie $K \subset M \subset L$. Pokaż, że $[M : K] < \infty$ wtedy i tylko wtedy $[Aut(L/K) : Aut(L/M)] < \infty$ oraz w tej sytuacji $[M : K] = [Aut(L/K) : Aut(L/M)]$.

   (b) Dla podgrupy $H < Aut(L/K)$ weźmy ciało elementów stałych jej działania $M = L^H$. Pokaż, że $Aut(L/M)$ jest domknięciem H w $Aut(L/K)$.

   (c) Twierdzenie Galois: Pokaż, że istnieje naturalna bijekcja pomiędzy rozszerzeniami pośrednimi $K \subset L$ a domkniętymi podgrupami $Aut(L/K)$.