Algebra 2*, wiosna 2012, seria X

Zadania na 7 maja. Proszę również zrobić ostatnie dwa zadania z poprzedniej serii; ich rozwiązania również będą punktowane (wskazówki np. w rozdziale 8 ksiażki Reida). Pozostałe materiały do tej części m.in. w rozdziale VII książki Aluffiego *Algebra, Chapter 0.* W tej serii p oznacza liczbę pierwszą.

1. Rozpatrzmy rozszerzenia algebraiczne $K \subset L$, $L \subset M$ oraz ich złożenie $K \subset M$.
   (a) Czy jeśli dwa z powyższych rozszerzeń są normalne to i to trzecie jest normalne (rozważ wszystkie przypadki, podaj przykłady)?
   (b) To samo pytanie dla rozszerzeń rozdzielczych.

2. Rozpatrzmy rozszerzenie $\mathbb{F}_p(x^p, y^p) \subset \mathbb{F}(x, y)$.
   (a) Pokaż, że jest ono skończone i normalne.
   (b) Znajdź domknięcie rozdzielcze ciała $\mathbb{F}_p(x^p, y^p)$ w $\mathbb{F}(x, y)$.
   (c) Pokaż, że to rozszerzenie ma nieskończoną liczbę rozszerzeń pośrednich.

3. Rozpatrzmy rozszerzenie $K \subset L$. Różniczkowaniem K (o wartościach w L) nazywamy przekształcenie $D : K \to L$, które jest addytywne $D(a + b) = D(a) + D(b)$ i spełnia regułę Leibnitza $D(ab) = dD(b) + bD(a)$.
   (a) Pokaż, że dla $a \in K$ mamy $D(a^n) = na^{n-1}D(a)$ oraz dla $f \in K[x]$ zachodzi $D(f(a)) = f^D(a) + f'(a) \cdot D(a)$, gdzie f' to (zwykła) pochodna wielomianu a f^D to wielomian otrzymany z f przez zastąpienie jego współczynników przez ich obrazy względem D.
   (b) Pokaż, że jeśli D_1 i D_2 są różniczkowaniami to D_1+D_2 oraz $D_1D_2-D_2D_1$ też są różniczkowaniami.
   (c) Pokaż, że ciało doskonałe dodatniej charakterystyki ma wyłącznie zerowe różniczkowania.

4. Niech $K_1 \subset K_2$ będzie skończonym rozszerzenim rozdzielczym. Pokaż, że każde różniczkowanie D ciała K_1 można jednoznacznie rozszerzyć do różniczkowania $\overline{D}$ ciała K_2. Wskazówka: z tw. Abela $K_2 = K_1(a)$, gdzie a jest elementem rozdzielczym z wielomianem minimalnym $f_a \in K_1[x]$. Wówczas musi zachodzić musi zachodzić $\overline{D}(a) = -f_a^D(a)/f'_a(a)$.

5. Wielomian cyklotomiczny Φ_n dla $n \geq 1$ jest, z definicji, produktem $\prod_{\mu_n}(x-\mu_n)$, gdzie μ_n przebiega wszystkie pierwiastki pierwotne stopnia n z jedności (zob. podrozdział 5.2 w rozdziale VII książki Aluffiego).

   (a) Pokaż, że dla $n \geq 2$ stopień Φ_n jest równy $\phi(n)$, gdzie ϕ oznacza funkcję Eulera.

   (b) Pokaż, że $x^m - 1 = \prod_{n|m} \Phi_n(x)$ i policz Φ_{2^n}.

   (c) Wykaż, że Φ_n ma współczynniki całkowite.

   (d) Pokaż, że wielomian Φ_n jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$. [1]

   (e) Pokaż, że jeśli dla pewnego całkowitego $a \geq 2$ liczba $\Phi_n(a)$ dzieli $a-1$ to $n = 1$.

   (f) Pokaż, że jeśli dla liczb całkowitych $a \geq 2$ i $d < n$ iloraz $(a^n - 1)/(a^d - 1)$ jest całkowity to jest również podzielny przez $\Phi_n(a)$.

6. Twierdzenie Wedderburne'a (zob. ćw. VII.5.14 u Allufiego). Niech R będzie skończonym pierścieniem z jedynką, z mnożeniem być może nieprzemiennym za to posiadającym elementy odwrotne: czyli grupa addytywna $(R, 0, -, +)$ jest abelowa (jak zwykle) zaś elementy niezerowe stanowią grupę $(R\backslash\{0\}, 1, \ ^{-1}, \cdot\,)$ (multiplikatywną) niekoniecznie przemienną. Teza: R jest ciałem. Twierdzenie to dowiedź w następujących krokach.

   (a) Pokaż, że centrum grupy multiplikatywnej wraz z zerem stanowi ciało o $q = p^r$ elementach (p jest pierwsza) zaś moc R jest równa q^n dla pewnego całkowitego n.

   (b) Pokaż, że równanie klas dla grupy multpilikatywnej jest postaci

   $$q^n - 1 = q - 1 + \sum_{d_i} \frac{q^n - 1}{q^{d_i} - 1}$$

   gdzie $d_i < n$.

   (c) Skorzystaj z poprzedniego zadania by pokazać, że $n = 1$.

---

[1] Wskazówka: jeśli byłby rozkładalny to moglibyśmy napisać $\Phi_n = f \cdot g$ gdzie $f,\ g \in \mathbb{Z}[x]$ oraz $f(\mu_n) = 0 = g(\mu_n^p)$ dla pewnego pierwiastka pierwotnego μ_n stopnia n z jedności i pewnego p pierwszego niedzielącego n. Wywnioskuj z tego, że po zredukowaniu współczynników modulo p wielomian f_p będzie dzielił wielomian g_p^p w pierścieniu $\mathbb{F}_p[x]$ a wobec tego f_p i g_p nie są względnie pierwsze w tym pierścieniu co prowadzi do sprzeczności z rozdzielczością Φ_n nad $\mathbb{F}_p$.