Algebra 2*, wiosna 2012, seria I
Zadania na 13 lutego, powtórzenie o modułach.

Materiał do tej serii zadań powinni Państwo znać z GALu i pierwszej Algebry; dla powtórzenia proszę zajrzeć do ksiażki Reida, *Undergraduate Commutative Algebra*, tu jest skan drugiego rozdziału, skąd wziąłem część zadań i gdzie znajdą Państwo również wskazówki a nawet rozwiązania niektórych z nich.

Notacja: A jest pierścieniem przemiennym z jednością. Jeśli nie jest powiedziane inaczej, to moduły są zdefiniowane nad A i zwykle oznaczane literami M, N, W, natomiast 0 oznacza moduł zerowy. Kojądro homomorfizmu modułów $\alpha : M \longrightarrow N$ to z definicji moduł ilorazowy $coker(\alpha) = N/im(\alpha)$.

Odwzorowania wieloliniowe modułów definiujemy podobnie jak odwzorowania wieloliniowe przestrzeni liniowych. Na przykład odwzorowanie dwuliniowe $\phi : M \times N \to W$ spełnia warunki $a \cdot \phi(m,n) = \phi(am,n) = \phi(m,an)$, $\phi(m_1+m_2,n) = \phi(m_1,n)+\phi(m_2,n)$ i $\phi(m,n_1+n_2) = \phi(m,n_1)+\phi(m,n_2)$,

Odwzorowanie r-liniowe A modułów

$$\phi : M \times \cdots \times M \to N$$

nazywamy alternującym (antysymetrycznym) jeśli dla dowolnych $1 \leq i \neq j \leq r$ zachodzi

$$\phi(\cdots m_i \cdots m_j \cdots) = -\phi(\cdots m_j \cdots m_i \cdots)$$

(tam gdzie są kropki nic nie zmieniamy). Odpowiednio, ϕ nazwiemy symetrycznym jeśli dla dowolnych $1 \leq i \neq j \leq r$ mamy

$$\phi(\cdots m_i \cdots m_j \cdots) = \phi(\cdots m_j \cdots m_i \cdots)$$

Ciągi dokładne. Ciąg homomorfizmów modułów

$$\cdots \longrightarrow M_i \xrightarrow{\alpha_i} M_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} M_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

jest dokładny w M_{i+1} jeśli $im(\alpha_i) = ker(\alpha_{i+1})$; ciąg jest dokładny jeśli jest dokładny w każdym miejscu.

1. Charakterystyka Eulera. Rozpatrzmy ciąg dokładny przestrzeni wektorowych nad ciałem k:

   $$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_r \longrightarrow 0$$

   Pokaż, że $\sum_{i=1}^{r} (-1)^i \cdot dim_k V_i = 0$.

2. Lemat o pięciu. Rozpatrzmy następujący diagram przemienny

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

w którym górny i dolny wiersz są dokładne. Pokaż, że jeśli cztery pionowe strzałki po bokach są izomorfizmami to i środkowa jest izomorfizmem.

3. Lemat o wężu. Rozpatrzmy następujący diagram przemienny

$$\begin{array}{ccccccccc} & & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & & \end{array}$$

w którym poziome ciągi są dokładne a pionowe strzałki oznaczamy odpowiednio α_1, α_2 i α_3. Pokaż, że istnieje homomorfizm $\delta : ker(\alpha_3) \to coker(\alpha_1)$ taki, że indukowany przez ten diagram ciąg homomorfizmów

$$ker(\alpha_1) \to ker(\alpha_2) \to ker(\alpha_3) \xrightarrow{\delta} coker(\alpha_1) \to coker(\alpha_2) \to coker(\alpha_3)$$

jest dokładny.

4. Produkt tensorowy. Pokazać, że dla każdej pary modułów M, N istnieje dokładnie jeden (z dokładnością do izomorfizmu) moduł $M \otimes N$ wraz z odwzorowaniem dwuliniowym $\psi : M \times N \to M \otimes N$ takim, że dla każdego dwuliniowego odwzorowania $\phi : M \times N \to W$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\widetilde{\phi} : M \otimes N \to W$ spełniający warunek $\widetilde{\phi} \circ \psi = \phi$. Oznaczenie: $m \otimes n$ oznacza $\psi(m, n)$.

5. Produkt zewnętrzny. Pokazać, że istnieje dokładnie jeden (z dokładnością do izomorfizmu) moduł $\bigwedge^r M$ wraz z odwzorowaniem r-liniowym alternującym $\psi : M \times \cdots \times M \to \bigwedge^r M$ takim, że dla każdego r-liniowego odwzorowania alternującego $\phi : M \times \cdots \times M \to N$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\widetilde{\phi} : \bigwedge^r M \to N$ spełniający warunek $\widetilde{\phi} \circ \psi = \phi$. Oznaczenie: dla $m_1, \ldots, m_r \in M$ przez $m_1 \wedge \cdots \wedge m_r$ oznaczamy $\psi(m_1, \ldots, m_r)$.

6. Produkt symetryczny. Pokazać, że istnieje dokładnie jeden (z dokładnością do izomorfizmu) moduł $S^r M$ wraz z odwzorowaniem r-liniowym symetrycznym $\psi : M \times \cdots \times M \to S^r M$ takim, że dla każdego r-liniowego odwzorowania symetrycznego $\phi : M \times \cdots \times M \to N$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\widetilde{\phi} : S^r M \to N$ spełniający warunek $\widetilde{\phi} \circ \psi = \phi$.

7. Wyznacznik. Niech M będzie A modułem wolnym rangi d nad A z bazą $m_1, \dots, m_d$. Pokazać, że istnieje dokładnie jeden homomorfizm $det : \bigwedge^d M \to A$ taki, że $det(m_1 \wedge \dots \wedge m_d) = 1$. Pokazać, że det jest izomorfizmem A modułów.

8. Pokazać, że jeśli M jest wolny, skończonej rangi, to i $\bigwedge^r M$ jest wolny, znaleźć jego rangę.

9. Pokazać, że jeśli M jest wolny, rangi d, to moduł $S^r M$ jest izomorficzny z modułem wielomianów jednorodnych stopnia r od d zmiennych o współczynnikach w A.

10. Kompleks Koszula. Niech M będzie skończenie generowanym A-modułem. Weźmy homomorfizm $h : M \to A$, którego obrazem jest ideał $I = h(M) \lhd A$. Definiujemy $d_r : \bigwedge^r M \to \bigwedge^{r-1} M$ (przyjmujemy $\bigwedge^0 M = A$) kładąc

$$d_r(m_1 \wedge \dots \wedge m_r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} h(m_i) \cdot m_1 \wedge \dots \wedge m_{i-1} \wedge m_{i+1} \wedge \dots \wedge m_r$$

    (a) Pokazać, że $d_i \circ d_{i+1} = 0$ więc $im(d_i) \subset ker(d_{i-1})$.
    (b) Pokazać, że jeśli A jest ciałem (i h jest niezerowe) to $im(d_i) = ker(d_{i-1})$, dla $i > 1$.
    (c) Zbadać warunek $im(d_i) = ker(d_{i-1})$ dla $A = k[x, y]$, $M = A \oplus A$ i $h(f_1, f_2) = xf_1 + yf_2$.
    (d) * To samo dla $A = k[x, y, z]$, $M = A \oplus A \oplus A$ i $h(f_1, f_2, f_3) = xf_1 + yf_2 + zf_3$.
    (e) Podaj przykład, że nie zawsze $im(d_i) = ker(d_{i-1})$.

11. Twierdzenie Cayleya-Hamiltona [Reid, 2.6]. Niech I_n oznacza macierz jednostkową $n \times n$. Dla macierzy Φ wymiaru $n \times n$ o współczynnikach z A definiujemy jej wielomian charakterystyczny $P_\Phi(t) = det(t \cdot I_n - \Phi) \in A[t]$) (gdzie det tym razem oznacza zwykły wyznacznik). Pokaż, że $P_\Phi(\Phi) = 0$ jako macierz $n \times n$. Równoważnie, niech $\phi : A^n \to A^n$ będzie endomorfizmem wolnego A-modułu rangi n zdefiniowanym przez Φ, to znaczy jeśli m_i są wektorami bazowymi A^r to $\phi(m_i) = \sum_j a_{ij} m_j$. Pokaż, że $P_\Phi(\phi) = 0$ w pierścieniu $A[\phi] \subset End(A^r)$. Wskazówka: rozpatrz macierz $\Delta = (\phi \cdot I_n - \Phi)$ o współczynnikach w $A[\phi]$ i skorzystaj z tego, że Δ ma macierz dołączoną $adj(\Delta)$ w $A[\phi]$ by pokazać, że $det(\Delta) = 0$ w $A[\phi]$.

12. Trik wyznacznikowy [Reid, 2.7]. Niech M będzie modułem generowanym przez n elementów a $\phi : M \to M$ jego endomorfizmem. Załóżmy, że I jest ideałem w A takim, że $\phi(M) \subseteq IM$. Pokaż, że ϕ spełnia następującą relację w $A[\phi]$:

$$\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\phi + a_n = 0$$

gdzie $a_s \in I^s$. (Skorzystaj ze wskazówki do poprzedniego zadania.)

13. Lemat Nakayamy. Skorzystaj z poprzedniego zadania by pokazać następujący fakt: Jeśli M jest skończenie generowanym A modułem a I ideałem w A takim, że $M = IM$ to istnieje $a \in A$ takie, że $a - 1 \in I$ oraz $aM = 0$.