Seminarium olimpijskie dla nauczycieli matematyki
Arkadiusz Męcel

Seminarium to wygłoszone zostało w SP nr 112 Przymierza Rodzin przy okazji zawodów II stopnia XV OMJ dnia 11 stycznia 2020 roku.

I. Dookoła liczb wymiernych

Definicja liczby wymiernej jako „przedstawialnej" w postaci ilorazu liczb całkowitych daleka jest od intuicji rachunkowych dzieci. Przeglądając różne zbiory z zadaniami konkursowymi szukałem działów typu „ułamki/liczby wymierne". Co zrozumiałe, znalazłem mnóstwo zadań sprawdzających operacje na ułamkach oraz sporo zadań tekstowych. Co mnie zaskoczyło: znalazłem też dużo zadań związanych z rozwinięciem dziesiętnym, zwłaszcza dotyczących liczb mających rozwinięcie okresowe. Zaskoczyło mnie to, bo gdy przeszukałem zbiór zadań z Olimpiady Matematycznej Juniorów umieszczony na stronie omj.edu.pl i znalazłem kilkanaście zadań związanych z zagadnieniem wymierności i niewymierności, odkryłem, że tylko jedno dotyczyło rozwinięcia dziesiętnego i pochodziło z testu. Oto ono (w formie zadania otwartego):

Zadanie 1 (IX OMJ, zadanie 10)**.** *Obliczyć* $\sqrt{0,4444\ldots}$

Trzydzieści pięć procent z ponad 13 tysięcy uczestników dało sie nabrać i zaznaczyło, że odpowiedź to: $0,2222\ldots$. Oczywiście $0,(4) = 4/9$, zaś $0,(2) = 2/9$, czyli nie jest to prawidłowa odpowiedź.

Dlaczego jest to jedyne zadanie olimpijskie o rozwinięciu dziesiętnym liczb (nie)wymiernych? Wynika to niestety z faktu, że bardzo mało wiemy o rozwinięciach dziesiętnych liczb niewymiernych poza tym, że nie są okresowe – a o tym wie każde dziecko. Rozwinięcia nieokresowe są zaś trudne do zrozumienia.

Chciałbym zaproponować kilka zadań, które mogą pomóc naszym uczniom rozszerzyć swoją intuicję dotyczącą liczb niewymiernych i ich nieskończonych rozwinięć dziesiętnych. Okaże się, że pozwoli nam to popracować z pojęciem nieskończoności i zadać kilka ciekawych pytań.

Zadanie 2. *Pewna liczba dodatnia x mniejsza od* 1 *ma rozwinięcie dziesiętne, którego kolejne cyfry są (czytanymi od lewej) cyframi w zapisie dziesiętnym kolejnych liczb naturalnych:*

$$x = 0,123456789101112131415...$$

Pokazać, że x jest niewymierna.

Rozwiązanie. Załóżmy, że od pewnego miejsca rozwinięcie opisywanej liczby jest okresowe i okres ten ma długość K. Oznacza to, że od pewnej pozycji po przecinku rozwinięcia x albo wszystkie cyfry są takie same ($K = 1$), albo wśród każdych K kolejnych cyfr są przynajmniej dwie **różne**. Na tym też polega okres długości > 1. Jest jasne, że pierwsza możliwość nie zachodzi, bo wtedy mielibyśmy do czynienia z liczbą wymierną. Także druga sytuacja nie może mieć miejsca, bo w rozwinięciu naszej liczby występują dowolnie długie ciągi jednakowych cyfr. A zatem rozwinięcie x jest nieokresowe i jest ona niewymierna.

Nadmienić należy, że x to słynna liczba wskazana w latach 30. przez studenta Champernowne'a. Pokazał on znacznie więcej niż jej niewymierność. Rozwinięcie dziesiętne tej liczby charakteryzuje się tym, że każdy blok (kolejnych) cyfr występuje w tym rozwinięciu z taką samą **częstością** – dla ilustracji (nieprecyzyjnej): po rozważeniu tryliona elementów rozwinięcia x i przeliczeniu ile jest w nich cyfr $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$ dowiemy się, że jest ich prawie po tyle samo. A „licząc do nieskończoności" będzie ich średnio tyle samo (wiję się tu mocno aby nie użyć żadnych poważnych pojęć). O liczbach tego rodzaju jest słynna hipoteza Borela z 1909 roku. Nie wiadomo czy $\sqrt{2}$ lub π są tego rodzaju (testy ilościowe temu nie przeczą).

Zadanie 3. *Dane są liczby dodatnie x, y, mniejsze od 1 i takie, że n-ta cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby y jest $2n$-tą cyfrą w rozwinięciu dziesiętnym liczby x. Czy jeśli x jest liczbą wymierna, to y też jest liczbą wymierną? Czy jeśli x jest liczbą niewymierną, to y też jest liczbą niewymierną?*

Odpowiedź na pierwsze pytanie jest pozytywna, a uzasadnienie wymaga rozumienia czym jest okres. Załóżmy, dla przykładu, że $x = 0,5(123)$. Jak wygląda zapis dziesiętny liczby y? Jest to $0,(132)$. Czy widzimy już o co chodzi? A jeśli $x = 0,(1234)$, to $y = 0,(24)$ itd. Teza jest jasna, jeśli x ma rozwinięcie skończone. Czy Państwa uczniowie wychodząc z tych obserwacji zapiszą formalny dowód ogólny?

Odpowiedź na drugie pytanie brzmi: NIE. Znowu warto zobaczyć przykład. Niech $y = 0,(123)$. A zatem

$$x = ?1?2?3?1?2?3?1?2?3?1?2?3...$$

Czy w to rozwinięcie nie dałoby się wpisać w miejsca znaków zapytania takiego ciągu cyfr, który dałby rozwinięcie nieokresowe? Da się, wystarczy wpisać rozwinięcie liczby Champernowne'a, które widzieliśmy w poprzednim zadaniu. Czy umielibyście Państwo uzasadnić, że dostaniemy liczbę niewymierną?

$$x = 1122334152637182931102131...$$

Zadanie 4 (IMO Shortlist, 2006 N2). *Dane są liczby dodatnie x, y, mniejsze od 1 i takie, że n-ta cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby y jest 2^n-tą cyfrą w rozwinięciu dziesiętnym liczby x. Pokazać, że jeśli x jest liczbą wymierną, to y też jest liczbą wymierną.*

Tak, jak wcześniej, rozwiązanie jest oczywiste, jeśli rozwinięcie x jest skończone. Załóżmy więc, że

$$x = 0.(a_1 a_2 \dots a_k).$$

Pomijamy przypadek, gdy po przecinku występuje jakaś skończona liczb cyfr – nie ma to żadnego znaczenia. Dla ilustracji rozwiązania przyjmiemy, że $k = 10$. A zatem n-ta cyfra po przecinku w rozwinięciu y to cyfra oznaczona numerem s_n, gdzie s_n to reszta z dzielenia 2^n przez 10. Oto jak wygląda pierwsze kilka cyfr liczby y:

$$0, a_2 a_4 a_8 a_6 a_2 a_4 a_8 a_6...$$

Widzimy, że powstaje ułamek okresowy. Zauważmy, że istnieje tylko skończenie wiele reszt jakie potęgi $\{2^1, 2^2, \dots, \}$ dają przy dzieleniu przez 10 (i przez dowolne k). Niech 2^a oraz 2^b dają równe reszty z dzielenia przez k. A zatem także 2^{a+1} oraz 2^{b+1} dają te same reszty, a także 2^{a+2} i 2^{b+2}, i tak dalej... A więc ciąg reszt jest rzeczywiście `periodyczny`. Można pokazać, że okres y ma długość co najwyżej jeden większą niż okres x. Przeniesienie rozumowania z $k = 10$ na ogólne to kwestia formalna.

Zadanie 5. *Liczba x jest niewymierna. Wynika z tego, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby x:*

(a) co najmniej jedna cyfra występuje nieskończenie wiele razy,

(b) co najmniej dwie cyfry występują nieskończenie wiele razy,

(c) co najmniej trzy cyfry występują nieskończenie wiele razy.

To zadanie ułożone jest jak typowy problem testowy na Olimpiadzie. Z jednej strony wychodzi od typowej wiedzy szkolnej, a z drugiej – sprawdza zrozumienie różnych pojęć. Zanim odpowiemy na podane pytanie zauważmy, że są i liczby wymierne x, których rozwinięcie spełnia każdy z powyższych warunków. Tak jest na przykład dla liczby $0,(123)$. A jak jest z liczbami niewymiernymi? Pierwszy podpunkt sprawdza wiedzę szkolną. Liczba niewymierna musi mieć nieskończone rozwinięcie dziesiętne, bo inaczej byłaby przedstawialna w postaci ułamka mieszanego $a\frac{b}{10^k}$, gdzie zapis dziesiętny liczby całkowitej b złożony jest z rozwinięcia liczby x, zaś k oznacza liczbę cyfr po przecinku. Skoro w rozwinięciu dziesiętnym liczby x jest nieskończenie wiele cyfr, to pewna musi występować nieskończenie wiele razy!

Podpunkt (b) jest również prawdziwy i to może być już trudniejsze dla wyobraźni uczniów. Chodzi o to, że gdyby w zapisie dziesiętnym liczby rzeczywistej x tylko jedna cyfra – nazwijmy ją c występowała nieskończenie wiele razy, to od pewnego momentu po przecinku nieskończone rozwinięcie dziesiętne liczby x składałoby się tylko z tej cyfry. To by oznaczało, że jest to rozwinięcie okresowe.

$$x = \underbrace{...,..............................}_{\text{cyfry niekoniecznie równe } c}(c).$$

Liczba x byłaby w rezultacie wymierna, co przeczy założeniu. To już dość sprytne rozumowanie.

Podpunkt (c) to już twardy orzech dla wyobraźni uczniów, ale odpowiedź brzmi: NIE. Istnieją liczby niewymierne, których rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone, nieokresowe i złożone jest jedynie z dwóch cyfr. Czy umiemy po prostu wskazać przykład takiej liczby niewymiernej x? Na czym polega tu wyzwanie? Załóżmy, że chcemy aby rozwinięcie szukanej liczby składało się tylko z zer i jedynek. W przeciwieństwie do poprzedniego punktu musimy zadbać nie tylko o to, żeby od pewnego momentu nie występowała żadna cyfra, ale w ogóle nie możemy od pewnego momentu dostać żadnego powtarzającego się układu cyfr 0-1, czyli okresu. Czy to się da zrobić? Owszem. Oto przykład:

$$x = 0,1101000100000000100...,$$

i n-ta jedynka po przecinku występuje na pozycji 2^n. Dlaczego ta liczba jest niewymierna? Rozumowanie jest takie samo jak w przypadku poprzedniego zadania. Pokażemy, że w rozwinięciu tym występują dowolnie długie ciągi zer poprzedzielane jedynkami. Zauważmy, że każdy kolejny segment kolejnych zer w rozwinięciu powyższej liczby ma $2^n - 2^{n-1}$ elementów, czyli 2^{n-1}. Liczba ta oczywiście rośnie w sposób nieograniczony wraz tym jak rośnie n. A zatem liczba x jest niewymierna. Czy ta konstrukcja jest już poza zasięgiem ucznia szkoły podstawowej, wystawionego na kontakt z rozwinięciami liczb niewymiernych?

Zadanie 6. *Pokazać, że rozwinięcie dziesiętne liczby $\sqrt{2}$ jest nieskończone.*

To wcale nie jest żart! Wszyscy wiemy, że jest to liczba niewymierna – ale na pewno nie każdy z Państwa uczniów widział (i zrozumiał) dowód algebraiczny. Tymczasem rozumowanie na poziomie intuicji jest bardzo proste. Jeśli rozwinięcie dziesiętne $\sqrt{2}$ jest skończone, na przykład

$$\sqrt{2} = 1.abc,$$

gdzie a, b, c to cyfry i $c \neq 0$, to mnożąc przez tysiąc i podnosząc do kwadratu dostajemy:

$$2000000 = (1000\sqrt{2})^2 = (1abc)^2.$$

Ta równość nie może mieć miejsca, ponieważ cyfra jedności liczby 2000000 to zero, a cyfra jedności liczby po drugiej stronie jest kwadratem liczby całkowitej, której cyfra jedności c jest niezerowa. Tak samo rozumujemy, jeśli rozwinięcie jest dłuższe (ale skończone). To oczywiście nie jest jeszcze dowód niewymierności liczby $\sqrt{2}$. Ale na podobnej zasadzie można próbować pokazać, że $\sqrt{2}$ nie może mieć rozwinięcia nieskończonego okresowego. Wymaga to jednak znajomości matematyki licealnej... i zawiera w sobie pewne subtelne kwestie. Trzeba bowiem uważać gdy porównujemy ze sobą dwa nieskończone rozwinięcia.

Wiemy bardzo niewiele o rozwinięciu dziesiętnym liczby $\sqrt{2}$. Jeśli któreś z Państwa uczniów udowodni, że rozwinięcie to posiada nieskończenie wiele jedynek, to będzie sławny. Problem ten zapisał jeszcze Sierpiński w książce z zadaniami z teorii liczb, i do tej pory nikt nie umie go rozwiązać.

* * *

II. Pierwsze, czy ostatnie?

Zadanie 1 (X OMG, III etap, zad 1). *Udowodnij, że każdą liczbę całkowitą większą od 5 można przedstawić w postaci sumy liczby pierwszej i liczby złożonej.*

Rozwiązanie jest natychmiastowe, jeśli wie się gdzie szukać. A szukać można na przykład w dziwnym założeniu, że rozważane liczby muszą być większe od 5. Dlaczego właśnie 5? Oczywiście jest tu gdzieś domyślne założenie, że składniki mają być liczbami dodatnimi, stąd $5 = 1 + 4 = 2 + 3$ nie ma rozkładu na sumę liczby pierwszej i liczby złożonej. A więc zadanie można rozumieć tak: twierdzimy, że 5 jest najmniejszą liczbą, dla której teza zadania nie jest prawdziwa. Dlaczego? Bo każda liczba n większa od 5 ma następujące dwa rozkłady na sumy liczby pierwszej i pewnej liczby:

$$n = 2 + (n - 2) = 3 + (n - 3).$$

Czy jest możliwe, aby choć jeden z tych rozkładów nie był tym, o który pytamy w zadaniu? Gdyby zarówno $n - 2$ jak i $n - 3$ nie były liczbami złożonymi, to obydwie musiałyby być liczbami pierwszymi. Rzadko kiedy jednak dwie kolejne liczby całkowite są pierwsze. Wynika stąd, że $n - 3 = 2, n - 2 = 3$, co przeczy, że $n > 5$. A zatem jedna z liczb $n - 3$, $n - 2$ jest złożona.

Powiecie Państwo, że w tym rozwiązaniu nie używaliśmy żadnej nieskończoności, i oczywiście jest to prawda. Zastosowaliśmy jednak ważne i charakterystyczne podejście: zapytaliśmy – dlaczego dopiero od pewnego miejsca postulowana własność ma miejsce? Sama własność była bardzo prosta, ale krok od niej znajdują się ciekawsze pytania, które pokazują, że problem nie pochodzi „znikąd".

Zadanie 2. *Udowodnij, że każda liczba całkowita większa od 7 jest sumą przynajmniej dwóch nieparzystych liczb pierwszych.*

Naśladując poprzednie zadanie możemy łatwo zobaczyć, że 7 nie jest sumą nieparzystych liczb pierwszych, ale być może nie uzyskujemy żadnej wyraźnej wskazówki co robić dalej. Tym razem składników może być wiele. Oczywiście na poziomie intuicji zadanie wydaje się oczywiste – każda liczba złożona jest przecież sumą liczb pierwszych, ale pozostaje rozważenie samych liczb pierwszych, a także sytuacji, gdy nie ma nieparzystego dzielnika pierwszego. Umiejętność dostrzeżenia trudności czy niuansu w zadaniu to jeden z elementów, który nas interesuje. Ale oczywiście można spróbować inaczej, i na kilka sposobów.

Spróbujmy – bawiąc się w przekornego ucznia – szukać liczby całkowitej większej od 7, która nie jest sumą przynajmniej dwóch nieparzystych liczb pierwszych. Ta liczba może się nazywać n. Moglibyśmy ponownie odjąć od niej 3, jak w poprzednim zadaniu, i zastanawiać się co dostaniemy. Mamy $n = 3 + (n - 3)$, więc mamy składnik pierwszy i drugi składnik, który najchętniej zamienilibyśmy na sumę nieparzystych liczb pierwszych. Nie ma jednak pewności, że $n - 3$ nie jest kolejnym przekornym przykładem i też się nie rozkłada na sumę nieparzystych liczb pierwszych. Oczywiście nietrudno sobie poradzić z tym problemem, ale wykorzystać można ciekawe podejście i założyć dodatkowo, że n to był **najmniejszy możliwy** przekorny przykład. W końcu jeśli istnieje przekorny przykład, to skoro mowa o liczbach całkowitych dodatnich, to któryś taki przykład jest najmniejszy. Skoro jednak n jest najmniejszy, to $n-3$ już nie może być kolejnym przykładem, bo jest MNIEJSZY. A zatem o $n - 3$ już mamy prawo zakładać, że rozkłada się na sumę przynajmniej dwóch nieparzystych liczb pierwszych... o ile przypadkiem $n - 3$ nie jest liczbą mniejszą lub równą 7. Z tym przypadkiem łatwo sobie jednak poradzić.

Tak naprawdę nie jest trudno pokazać, że każda liczba całkowita n większa od 7 jest sumą wielokrotności liczb $3, 5$ oraz 7. Jak to zrobić? Odejmijmy od n liczbę trzy tyle razy, aby różnica liczbą mniejszą lub równą 7. Oczywiście jest to możliwe. Zostało zatem do sprawdzenia kilka przypadków. Jeśli różnica to 7, to nasza liczba jest sumą $7+3k$, dla pewnego k. Jeśli różnica to 6, to wyjściowa liczba była wielokrotnością 3, jeśli to 5, to rozumujemy podobnie jak dla różnicy 7. Różnica nie może być natomiast mniejsza, bo mieliśmy odejmować liczby 3 tak długo aż będziemy mieli wynik mniejszy niż 8. Koniec dowodu.

To wciąż było niemal podręcznikowe zadanie. Nietrudno jednak zmienić je na nieco trudniejsze.

Zadanie 3. *Udowodnij, że każda liczba całkowita większa od* 7 *jest sumą przynajmniej dwóch parami różnych liczb pierwszych.*

Teraz problem jest już poważny, bo dany składnik pierwszy mogę użyć tylko raz. Innymi słowy potrzebne będzie korzystanie z dużych składników pierwszych. A o nich przecież za wiele nie wiemy, prawda?
Tu okazuje się, że nie wystarczy wiedzieć, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Poza analizą pierwszych kilku z nich czy znajomością pewnych podstawowych cech (na przykład: liczby pierwsze rzadko są parzyste, lub innych bardziej wyrafinowanych) nie wiemy jak z każdą liczbą naturalną skojarzyć jakąś dużą liczbę pierwszą. Nie znając kontekstu trudno patrząc na zadania 2 i zadania 3 powiedzieć, że dotyczą problemów o kompletnie innym kalibrze. Nie chcę męczyć Państwa dokładnym rozwiązaniem tego zadania, ale powiem na czym ono polega. Otóż skorzystać trzeba z tego, że wprawdzie liczby pierwsze rozmieszczone są w sposób nie do końca dla nas zrozumiały, to zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *(Czebyszew, 1852) Dla każdej liczby całkowitej $n > 1$ istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza p taka, że $n < p < 2n$.*

To twierdzenie mówi coś więcej niż to, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Mówi ono, że startując od pewnej liczby całkowitej możemy mieć pewność, że zanim osiągniemy jej dwukrotność, natkniemy są na liczbę pierwszą. Proszę zauważyć, że jest wiele nieskończonych zbiorów liczb całkowitych, które nie mają tej własności – na przykład zbiór potęg liczby 3 postaci: $\{1, 3, 9, 27, 81, ...\}$.

Czy poradzimy sobie z rozwiązaniem Zadania 3 mając w ręku powyższy fakt?

Zadanie 4. *Pokazać, że każda liczba całkowita $>$ 3 jest sumą dwóch lub trzech liczb pierwszych.*

Patrząc na poprzednie zadanie wydaje się, że i to powinniśmy być w stanie jakoś rozwiązań. Okazuje się jednak, że jest to już jeden z najsłynniejszych problemów matematycznych w historii – dotąd nierozwiązanych. Jest to tak zwana hipoteza Goldbacha z 1742 roku. „Łatwiejsza” jej część – zwana słabą hipotezę Goldbacha, a więc fakt, że każda liczba nieparzysta jest sumą trzech liczb pierwszych udowodniony został wielkim wysiłkiem całego pokolenia matematyków w 2013 roku i wciąż czeka na publikację. Ma bowiem ponad 250 stron. W 2012 roku jeden z najsłynniejszych matematyków świata – złoty medalista olimpiad międzynarodowych w wieku 11 lat – z trudem pokazał tę hipotezę dla pięciu składników pierwszych.

Co szokujące – problem Goldbacha dla liczb parzystych > 3: czy zawsze da się je przedstawić jako sumę dwóch liczb pierwszych wciąż pozostaje poza zasięgiem. W 1973 r. chiński matematyk Jingrup pokazał „jedynie”, że każda dostatecznie duża liczba parzysta jest sumą liczby pierwszej oraz iloczynu co najwyżej dwóch liczb pierwszych. Od tej pory wiele nie zrobiono. A zatem – od zadania olimpijskiego, do ogólnego problemu. Obydwa wypowiedziane w tym samym języku i stylu. To jest **sens** zadania z X OMG.