Kolokwium pierwsze z GAL I, 28 listopada 2024

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
• Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko (WIELKIMI LITERAMI), numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego oraz numer zadania.

Zadanie 1. Niech U będzie układem równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych postaci

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 &= 1 \\ 2x_1 \qquad\quad - x_3 - \ \ x_4 &= 2 \\ 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 + px_4 &= 4 + r \end{cases} .$$

gdzie $p, r \in \mathbb{R}$.

(6 p.) Dla $p = 1$ i $r = 0$ znajdź rozwiązanie ogólne układu U. Wskaż zmienne zależne i niezależne.

(7 p.) Niech U' będzie jednorodnym układem równań liniowych odpowiadającym układowi U. Znajdź wymiar przestrzeni rozwiązań układu U' w zależności od $p \in \mathbb{R}$.

(7 p.) Rozstrzygnij, dla jakich $p, r \in \mathbb{R}$ układ U jest niesprzeczny.

Zadanie 2. Niech $W = \mathrm{lin}((1, 2, 1, 3), (2, 5, 1, 4), (1, -1, 4, a)) \subset \mathbb{R}^4$.

(6 p.) Udowodnij, że $\dim W = 2$ wtedy i tylko wtedy gdy $a = 9$.

(6 p.) W zależności od $a \in \mathbb{R}$ opisz podprzestrzeń W układem równań.

(8 p.) Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ wektor $(1, b, 2, 4)$ należy do podprzestrzeni W? Dla wszystkich takich a, b dopełnij ten wektor do bazy W.

Zadanie 3. (10 p.) Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów w przestrzeni liniowej V. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

(a) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V,

(b) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,

(c) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Zadanie dodatkowe (20 p.) Dla wektorów $\alpha, \beta \in K^n$ postaci

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\,,\ \beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

niech $M(\alpha, \beta) = [m_{ij}]$ będzie macierzą rozmiaru $n \times n$, której wyrazy są równe

$$m_{ij} = a_i b_j,$$

dla każdych $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(6 p.) Udowodnij, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in K^n$ rząd macierzy $M(\alpha, \beta)$ wynosi co najwyżej 1.

(7 p.) Udowodnij, że każda macierz ze zbioru $M_{n\times n}(K)$ o rzędzie $\leqslant 1$ jest równa $M(\alpha, \beta)$ dla pewnych $\alpha, \beta \in K^n$.

(7 p.) Załóżmy że wektory $\alpha, \alpha' \in K^n$ są liniowo niezależne oraz, że wektory $\beta, \beta' \in K^n$ są liniowo niezależne. Niech

$$B = M(\alpha, \beta) + M(\alpha', \beta')$$

Znajdź rząd macierzy B.

Uwaga. Zadanie dodatkowe może być rozwiązane zamiast Zadania 1. lub Zadania 2. Ocena rozwiązania powyższego zadania będzie uwzględniona w łącznym wyniku kolokwium jedynie w przypadku, gdy nie będzie oddane rozwiązanie co najmniej jednego z Zadań 1 lub 2.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL I Kolokwium pierwsze, 28 listopada 2024

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 4. (6×5 p.) Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania:

1. Podaj przykład takiego wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, którego pierwiastkami są liczby $\sqrt{2}$ oraz $1+i$.

2. Liczby zespolone z_1, z_2 spełniają $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$ oraz $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$. Czy $z_1 = \overline{z}_2$?

3. Znajdź rząd macierzy rozmiaru 3×3 o wyrazach w ciele pięcioelementowym $\mathbb{Z}_5$, postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL I Kolokwium pierwsze, 28 listopada 2024

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 4 (c.d.)

4. Niech W będzie podprzestrzenią wymiaru 3 przestrzeni liniowej V wymiaru 4. Czy istnieje baza V taka, że żaden jej wektor nie należy do W?

5. Niech funkcja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie dana wzorem $f(z) = (1+i)z$. Obraz podzbioru $A \subset \mathbb{C}$ przy funkcji f, czyli zbiór $f(A) = \{f(z) : z \in A\}$, jest okręgiem o środku i oraz promieniu 4. Czy zbiór A jest okręgiem? Jeśli tak, to znajdź jego środek i promień.

6. Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ będą bazami przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{R}$, przy czym $\beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_2 = -\alpha_2$ oraz $\beta_3 = 2\alpha_2 + \alpha_3$. Czy istnieje taki niezerowy wektor $\gamma \in V$, który ma identyczne współrzędne w obydwu tych bazach?