

Egzamin GAL I, 1 luty 2025

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko (WIELKIMI LITERAMI), numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego oraz numer zadania.

Zadanie 1. Niech

$$V = \text{lin}((1, 5, 3, 0), (1, -1, a, 3), (1, 1, -1, 2)), \text{ gdzie } a \in \mathbb{R},$$

$$W = \text{lin}((1, 1, 1, 2), (0, 2, 1, b)), \text{ gdzie } b \in \mathbb{R},$$

$$Z = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$$

będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$.

- (6 p.) Udowodnij, że $\dim V = 2$ wtedy i tylko wtedy gdy $a = -3$. Dla jakich $b \in \mathbb{R}$ wektor $(0, 2, 1, b)$ należy do Z ?
- (7 p.) Znajdź wymiary przestrzeni liniowych $W \cap Z$ oraz $W + Z$, w zależności od $b \in \mathbb{R}$.
- (7 p.) Rozstrzygnij, dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $V + W = V \oplus W$?

Zadanie 2. Niech $\mathcal{A} = ((1, 1, 0), (2, 1, 0), (0, 0, 1))$ będzie bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$. Przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane jest macierzą

$$M(\phi)_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Przekształcenie liniowe $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dane jest wzorem

$$\psi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2).$$

- (10 p.) Niech $\mathcal{B} = ((0, 1), (1, 1))$ będzie bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$. Wyznacz $M(\psi \circ \phi)_{st}^{\mathcal{B}}$.
- (10 p.) Znajdź wszystkie $a \in \mathbb{R}$ i bazy $\mathcal{C}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$, takie że

$$M(\psi \circ \phi)_{st}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Zadanie 3. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s & 0 \\ 2 & 0 & 1 & s \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R}).$$

(10 p.) Oblicz $\det A$.

(10 p.) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ spełniające warunek $M(\phi)_{st}^{st} = A^2$ jest izomorfizmem? Czy istnieje $s \in \mathbb{R}$, że $r(BA) = 2$, dla pewnej odwracalnej macierzy $B \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$?

Zadanie 4. (10 p.) Niech V_1, V_2 będą skończone wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V . Wykaż, że zachodzi równość $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

Zadanie 5 (20 p.)

- (10 p.) Niech $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{K})$, przy czym A jest macierzą odwracalną oraz spełniony jest warunek $r\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = n$. Udowodnij, że $CA^{-1}B = D$.
- (10 p.) Wykaż, że jeśli $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ oraz $B \in M_{n \times s}(\mathbb{K})$, to $r\left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & I_n \end{bmatrix}\right) = n + r(AB)$.

Imię i nazwisko

numer indeksu

grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia

Egzamin GAL I, 1 luty 2025

Podpisz niniejszą kartkę i wpisz w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 6. (6×5 p.)

1. Niezerowe przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spełnia warunek $\text{im}(\phi) \subset \ker(\phi)$. Jakie są możliwe wartości $\dim \text{im}(\phi)$?

2. Niech $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, dla pewnych podprzestrzeni U, W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$. Obraz wektora $\alpha \in \mathbb{R}^3$ w symetrii względem U wzdłuż W równy jest $(1, 2, 3)$, a obraz wektora α przy rzucie na W wzdłuż U jest równy $(3, 2, 1)$. Wyznacz α .

3. Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ gdzie $n > 2$. Każde dwa wiersze macierzy A tworzą układ liniowo niezależny. Czy macierz ta musi być odwracalna?

Imię i nazwisko

numer indeksu

grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia

Egzamin GAL I, 1 luty 2025

Podpisz niniejszą kartkę i wpisz w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 6 (c.d.)

4. Rozstrzygnij, ile jest różnych izomorfizmów $\phi : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2^2$.

5. Przestrzenie liniowe V, W są skończenie wymiarowe oraz $U \subset V$ jest podprzestrzenią taką, że $\dim U < \dim V - \dim W$. Czy istnieje przekształcenie liniowe $\phi : V \rightarrow W$ takie, że $\ker \phi = U$?

6. Dana jest przestrzeń liniowa V wymiaru 3. Układ dwóch liniowo niezależnych funkcjonałów $f_1, f_2 \in V^*$ spełnia warunek $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0$, dla pewnego $\alpha \neq 0$. Czy dla każdego funkcjonału $f \in V^*$ takiego, że $f(\alpha) \neq 0$ układ f_1, f_2, f jest bazą V^* ?