GAL I Kolokwium drugie, 25 stycznia 2024

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko (WIELKIMI LITERAMI), numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania.

Zadanie 1. Dane są podprzestrzenie przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ postaci $V_t = \mathrm{lin}((1,2,2,1),(1,1,-1,t))$ oraz $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 - x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0\}$.

(10 p.) Znajdź wymiar podprzestrzeni $V_t + W$ oraz $V_t \cap W$ w zależności od parametru t.

(10 p.) Dla $t = 1$ niech $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie rzutem na V_1 wzdłuż W. Oblicz $\varphi((2,3,4,1))$.

Zadanie 2. Niech $\mathcal{A} = ((2,1,2),(1,1,0),(-2,-2,1))$ oraz $\mathcal{B} = ((1,1,1),(1,0,1),(0,1,1))$ będą bazami przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$. Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ oraz $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi takimi, że

$$M(\varphi)_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(5 p.) Znajdź współrzędne wektora $\varphi((-1,-2,3))$ w bazie $\mathcal{A}$.

(5 p.) Znajdź bazę podprzestrzeni $\ker(\varphi)$.

(10 p.) Znajdź wzór przekształcenia liniowego $\psi \circ \varphi$.

Zadanie 3. W poniższym zadaniu wszystkie macierze mają współczynniki rzeczywiste.

(10 p.) Niech $X = \begin{bmatrix} y & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & y \end{bmatrix}$. Dla jakich $x, y \in \mathbb{R}$ macierz X jest odwracalna?
Dla każdej wskazanej pary x, y znajdź X^{-1}.

(10 p.) Oblicz wyznacznik macierzy $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ postaci

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. (10 p.) Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

(a) przekształcenie ϕ jest monomorfizmem i epimorfizmem,

(b) istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$, że $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ oraz $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$.

Zadanie 5. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K, takim że $1+1 \neq 0$. Niech $\phi : V \to V$ oraz $\psi : V \to V$ będą przekształceniami liniowymi.

(10 p.) Wykaż, że jeśli $v \in \ker(\phi + \psi)$, to $\phi(v) \in \mathrm{im}\,\phi \cap \mathrm{im}\,\psi$. Udowodnij, że jądro przekształcenia liniowego $f : \ker(\phi + \psi) \to \mathrm{im}\,\phi \cap \mathrm{im}\,\psi$ danego wzorem $f(v) = \phi(v)$ równe jest $\ker \phi \cap \ker \psi$.

(10 p.) Uzasadnij, że $\dim \ker(\phi + \psi) \leqslant \dim(\ker \phi \cap \ker \psi) + \dim(\mathrm{im}\,\phi \cap \mathrm{im}\,\psi)$. Wskaż parę niezerowych przekształceń liniowych ϕ, ψ, dla których powyższa nierówność jest równością.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL I Kolokwium drugie, 25 stycznia 2024

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 6. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania (6×5 p.):

1. Czy funkcja $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dana wzorem $\phi(z_1, z_2) = \overline{z_1} - z_2$ jest przekształceniem liniowym przestrzeni liniowych nad ciałem liczb zespolonych?

2. Niech $A \in M_{9\times 4}(\mathbb{R})$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $\varphi : V \to W$ w pewnych bazach przestrzeni liniowych V oraz W. Niech $\dim \ker \varphi = 2$. Wyznacz $\dim \operatorname{im} \varphi$.

3. Dana jest macierz kwadratowa $X \in M_{155}(\mathbb{Q})$, taka że $X^2 = X^T$. Czy wynika z tego, że X jest macierzą identycznościową lub zerową? Jakie są możliwe wartości $\det X$?

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL I Kolokwium drugie, 25 stycznia 2024

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 6 (c.d.)

4. Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym oraz niech $\mathcal{X} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\mathcal{Y} = (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$ będą bazami przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$. Czy istnieje taka macierz $T \in M_3(\mathbb{R})$, że $M(\varphi)_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}} = T \cdot M(\varphi)_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Y}} \cdot T$?

5. Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}, \mathcal{B} = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$ będą bazami przestrzeni liniowej K^n. Macierz

$$[\beta_1 \ \beta_2 \ ... \ \beta_n \mid \alpha_1 \ \alpha_2 \ ... \ \alpha_n] \in M_{n\times 2n}(K),$$

której kolejne kolumny równe są $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sprowadzamy za pomocą operacji na wierszach do macierzy $[\ I_n \mid C\ ]$. Czy $C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$?

6. Niech V będzie przestrzenią liniową, a W – jej podprzestrzenią, przy czym $\dim V = 10, \dim W = 4$. Wyznacz wymiar podprzestrzeni przestrzeni liniowej $L(V, V)$ złożonej z takich $f : V \to V$, że $f(W) \subseteq W$.