GAL I Kolokwium pierwsze, 30 listopada 2023

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
• Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko (WIELKIMI LITERAMI), numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania oraz literę tematu.

Zadanie 1. Niech U będzie układem równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych postaci

$$\begin{cases} 2x_1 + sx_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + tx_4 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \end{cases}.$$

(9 p.) Dla $s = 0$ i $t = 5$ zapisz zbiór rozwiązań układu U w postaci $v + W$, gdzie $v \in \mathbb{R}^4$ oraz W jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Wyznacz wymiar oraz dowolną bazę podprzestrzeni W.

(9 p.) Dla jakich wartości parametrów s, t układ U jest sprzeczny?

Zadanie 2. Niech $V = \operatorname{lin}((1,2,-1,3),(0,1,-2,2),(1,0,3,-1),(1,3,-3,s))$

(9 p.) Wyznacz $\dim V$, w zależności od parametru s. Dla jakich wartości parametru s zachodzi równość $V \oplus \operatorname{lin}((2,7,-8,2)) = \mathbb{R}^4$?

(9 p.) Dla $s = 1$ wyznacz układ równań liniowych opisujący przestrzeń V oraz wskaż przykład bazy przestrzeni V, w której wektor $(2,6,-6,7)$ ma współrzędne $0,1,0$.

Zadanie 3. Rozważmy zbiór $\mathcal{A} = \{\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{11}\}$ pierwiastków zespolonych stopnia 12 z 1.

(10 p.) Uzasadnij, że zbiór $\mathcal{B}$ wszystkich pierwiastków zespolonych wielomianu $x^4 - x^2 + 1$ zawarty jest w zbiorze $\mathcal{A}$. Wyznacz postaci ogólne i trygonometryczne wszystkich elementów zbioru $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Zaznacz elementy tego zbioru na płaszczyźnie zespolonej.

(4 p.) Uzasadnij, że $(\sqrt{3} + i - \varepsilon_0) \cdot (\sqrt{3} + i - \varepsilon_1) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{3} + i - \varepsilon_{11}) = 2^{12} - 1$.

(4 p.) Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $x^{12} - 1$ w ciele $\mathbb{Z}_5$.

Zadanie 4. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\beta_1, \ldots, \beta_k \in V$.

(5 p.) Wykaż. że następujące warunki są równoważne:
- układ $\beta_1, \ldots, \beta_k$ jest liniowo zależny,
- jeden z wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_k$ jest kombinacją liniową pozostałych.

(3 p.) Wykaż, że jeśli $V = \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, to z układu $\beta_1, \ldots, \beta_n$ wybrać można liniowo niezależny podukład $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, taki że $V = \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \operatorname{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL I Kolokwium pierwsze, 30 listopada 2023

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 5. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania (6×3 p.):

1. Czy zbiór wszystkich wielomianów nieparzystego stopnia wraz z wielomianem zerowym jest podprzestrzenią przestrzeni $K[x]$?

2. Przestrzeń rozwiązań jednorodnego układu dwóch równań liniowych o $n \geqslant 1$ zmiennych ma wymiar 30. Wyznacz wszystkie możliwe wartości n. Odpowiedź uzasadnij.

3. Niech V_1, V_2 będą różnymi podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V. Niech $\alpha_1 \in V_1 \setminus V_2$ oraz $\alpha_2 \in V_2 \setminus V_1$. Czy układ $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ może być liniowo zależny?

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL I Kolokwium pierwsze, 30 listopada 2023

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 5 (c.d.)

4. Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ oraz $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ będą bazami przestrzeni liniowej V. Czy dla każdego wektora $\alpha \in \mathcal{A}$ istnieje wektor $\beta \in \mathcal{B}$, że układ $(\mathcal{A} \setminus \{\alpha\}) \cup \{\beta\}$ jest bazą V?

5. Czy dla każdej liczby ε, będącej pierwiastkiem zespolonym stopnia n z 1, istnieje taka dodatnia liczba całkowita m, że liczba $i \cdot \varepsilon$ jest pierwiastkiem stopnia m z 1?

6. Niech W_1, W_2 będą nieskończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V. Załóżmy, że $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$. Czy wynika stąd, że $\dim(W_1 \cap W_2) = \infty$?