Trochę inne rozwiązanie zadania 5, czyli POKOCHAJCIE STRZAŁKI!

Na macierze będziemy patrzeć jak na przekształcenia liniowe. W przestrzeni K^n zawsze wybieramy bazę standardową, więc będziemy przekształcenia oznaczać tak jak macierze.

a) Z założenia mamy dwa przemienne diagramy przekształceń liniowych:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"'] & K^n \arrow[dl, "C"] \\ K^n & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "B"] \arrow[d, "A"] & K^n \arrow[dl, "D"] \\ K^n & \end{tikzcd}$$

Patrząc na pierwszy diagram mamy $A(v) = 0 \Rightarrow CA(v) = B(v) = 0$, czyli $\ker A \leqslant \ker B$. Analogiczne rozumowanie w odniesieniu do drugiego diagramu prowadzi do zawierania $\ker B \leqslant \ker A$. Zatem $\ker A = \ker B$.

b) Tym razem mamy następujące przemienne diagramy:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "E"] \arrow[d, "B"'] & K^n \arrow[dl, "A"] \\ K^n & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "F"] \arrow[d, "A"] & K^n \arrow[dl, "B"] \\ K^n & \end{tikzcd}$$

Patrzymy na pierwszy diagram. Oczywiście $\operatorname{im} AE = \operatorname{im} B$, ale jest jasne że $\operatorname{im} AE \subseteq \operatorname{im} A$. Zatem $\operatorname{im} B \subseteq \operatorname{im} A$. Z drugiego diagramu dokładnie tak samo dostajemy $\operatorname{im} A \subseteq \operatorname{im} B$, czyli w rezultacie $\operatorname{im} A = \operatorname{im} B$.

(Uwaga: Zauważmy, że teza punktu b) jest prawdziwa dla dowolnych odwzorowań zbiorów, niekoniecznie dla przestrzeni liniowych i ich przekształceń liniowych.)

c) Załóżmy, że $\ker A = \ker B$. Szukamy takiego przekształcenia C, że przemienny jest diagram

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"'] & K^n \arrow[dl, dashed, "C"] \\ K^n & \end{tikzcd}.$$

Jeśli ma zachodzić równość $CA = B$, to przekształcenie $C_{|\operatorname{im} A}$ może być zdefiniowane tylko w jeden sposób: $C(A(v)) = B(v)$. Musimy sprawdzić, że jest to poprawna definicja tzn. jeżeli $A(v) = A(v')$ to $CA(v) = CA(v')$. Tak jest bowiem $A(v) = A(v') \iff v - v' \in \ker A$. Ale z założenia $\ker A \leqslant \ker B$, więc $B(v) = B(v')$. Tak zdefiniowane przekształcenie C jest oczywiście liniowe. Na to by zdefiniować przekształcenie C na całej przestrzeni K^n znajdujemy wektory liniowo niezależne $v_1, \ldots, v_k$ takie że $\operatorname{im} A \oplus \operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_k\} = K^n$ i na tych wektorach definiujemy C w dowolny sposób. Widać więc, że przekształcenie C jest wyznaczone jednoznacznie tylko wtedy, gdy A jest epimorfizmem.

Dokładnie w taki sam sposób, korzystając z zawierania $\ker B \leqslant \ker A$ dowodzimy istnienia przekształcenia liniowego D, dla którego $DB = A$.