Rozwiązanie zadania 5. z kolokwium 2 z GAL (2023)

Zadanie 5. Niech $A, B \in M_{n\times n}(K)$ oraz niech $\phi, \psi \in L(K^n, K^n)$ będą przekształceniami liniowymi takimi, że $A = M(\phi)_{st}^{st}$ oraz $B = M(\psi)_{st}^{st}$. Wykaż, że:

(a) jeśli $CA = B$ oraz $DB = A$, dla pewnych $C, D \in M_{n\times n}(K)$, to $\ker(\phi) = \ker(\psi)$,

(b) jeśli $AE = B$ oraz $BF = A$, dla pewnych $E, F \in M_{n\times n}(K)$, to $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{im}(\psi)$.

(c) jeśli $\ker(\phi) = \ker(\psi)$, to istnieją $C, D \in M_{n\times n}(K)$ takie, że $CA = B$ oraz $DB = A$.

Rozwiązanie. Zacznijmy od punktu (a). Jeśli $v \in \ker(\phi)$, to[1] $Av = 0$, a więc także

$$C(Av) = (CA)v = Bv = 0.$$

Stąd $\ker(\phi) \subseteq \ker(\psi)$. Podobnie, jeśli $w \in \ker(\psi)$, to $Bw = 0$, czyli także $DBw = Aw = 0$. Stąd $\ker(\psi) \subseteq \ker(\phi)$, co łącznie z uzyskaną wyżej imkluzją przeciwną daje $\ker(\phi) = \ker(\psi)$.

Aby pokazać (b) można na przykład sprawdzić czy przestrzenie kolumnowe macierzy A oraz B są równe, ponieważ przestrzenie te równe są odpowiednio $\mathrm{im}(\phi)$ oraz $\mathrm{im}(\psi)$. Wiadomo jednak, że kolumny iloczynu AE są kombinacjami liniowymi kolumn macierzy A. A zatem przestrzeń kolumnowa macierzy A zawiera przestrzeń kolumnową macierzy B. W szczególności $\mathrm{im}(\psi) \subseteq \mathrm{im}(\phi)$. Podobnie z równości $BF = A$ wnioskujemy, że przestrzeń kolumnowa macierzy B zawiera przestrzeń kolumnową macierzy A, co oznacza, że $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{im}(\psi)$.

Alternatywne rozumowanie, podobnie jak w (a): jeśli $w \in \mathrm{im}(\psi)$, to istnieje takie $v \in K^n$, że $Bv = (AE)v = w$. Skoro jednak mnożenie macierzy jest łączne, to $(AE)v = A(Ev) = w$, czyli w jest obrazem wektora Ev przy przekształceniu ϕ. W szczególności $\mathrm{im}(\psi) \subseteq \mathrm{im}(\phi)$.

Dowodzimy (c). Wybieramy bazę $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ przestrzeni K^n tak, by ostatnie $n - j$ wektorów było bazą $\ker(\phi)$. Skoro $\ker(\phi) = \ker(\psi)$, to $\psi(u_i) = 0$, dla $i > j$, zaś (z wykładu):

- obrazy $\phi(u_i)$ wektorów u_i są dla $i \leqslant j$ bazą przestrzeni $\mathrm{im}(\phi)$,
- obrazy $\psi(u_i)$ wektorów u_i są dla $i \leqslant j$ bazą przestrzeni $\mathrm{im}(\psi)$.

Niech $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ będą takimi bazami K^n, których pierwsze j wektorów to odpowiednio $\phi(u_i)$ oraz $\psi(u_i)$, dla $i \leqslant j$. Rozważmy **izomorfizm** $g : K^n \to K^n$ przeprawadzający i-ty element bazy $\mathcal{B}$ na i-ty element bazy $\mathcal{A}$. Wówczas dla $i \leqslant j$ mamy $g(\psi(u_i)) = \phi(u_i)$. Co więcej:

$$M(g)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M(\psi)_{\mathcal{U}}^{\mathcal{B}} = M(g \circ \psi)_{\mathcal{U}}^{\mathcal{A}}.$$

Wnioskujemy stąd, że obrazy wektorów bazowych z $\mathcal{U}$ przy przekształceniu $g \circ \psi$ są takie same, jak obrazy wektorów bazowych z $\mathcal{U}$ przy przekształceniu ϕ. Istotnie, obrazy pierwszych j elementów bazy $\mathcal{U}$ to wektory $\phi(u_i)$, a obrazy pozostałych $n - j$ wektorów bazy $\mathcal{U}$ to obrazy wektorów z $\ker(\phi) = \ker(\psi)$, czyli wektory zerowe. A zatem z twierdzenia o jednoznaczności przekształcenia liniowego zadanego na bazie mamy $g \circ \psi = \phi$. W szczególności, jeśli przyjmiemy $D = M(g)_{st}^{st}$, to $DB = A$. Istnienie macierzy C jest oczywiste: wystarczy przyjąć $C = D^{-1}$.

[1] Stosujemy znane z wykładu przyporządkowanie wektorowi $v \in K^n$ macierzy rozmiaru $n \times 1$ o wyrazach z ciała K, zawierającej współrzędne v w odpowiedniej bazie. Pisząc Av, dla $A = M(\phi)_{st}^{st}$, mamy na myśli mnożenie macierzy A przez macierz współrzędnych (tzw. wektor kolumnowy) wektora v w bazie standardowej.