GAL I Kolokwium drugie, 26 stycznia 2023

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić, aby otrzymać za nią maksymalną liczbę punktów.
• Rozwiązania każdego zadania 1 – 5 TRZEBA oddać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Rozwiązania podpunktów zdania 6 TRZEBA przedstawić na kartkach, które Państwo otrzymaliście; jeśli zbraknie miejsca tuż pod sformułowaniem zadania, proszę użyć drugiej strony kartki.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko (WIELKIMI LITERAMI), numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania oraz literę tematu.

Zadanie 1. [20pt] Rozpatrzmy przestrzenie liniowe $V = \mathbb{Q}^4$, $W = \mathbb{Q}^3$ i przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ zadane wzorem

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_4,\ -x_2 - x_3 + x_4,\ x_1 + x_3).$$

(a) Znajdź $k = \dim \ker(\phi)$ i $r = \dim \operatorname{im}(\phi)$.

(b) Wyznacz dowolną podprzestrzeń V' przestrzeni V, która spełnia warunek $V = \ker(\phi) \oplus V'$. Wypisz bazę podprzestrzeni V'.

(c) Wyznacz dowolną podprzestrzeń W' przestrzeni W, która spełnia warunek $W = \operatorname{im}(\phi) \oplus W'$. Wypisz bazę podprzestrzeni W'.

(d) Znajdź przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$ takie, że złożenie

$$\psi \circ \phi : V \to V$$

jest rzutem na podprzestrzeń $V' \subseteq V$ wzdłuż $\ker(\phi)$. Przekształcenie ψ zadaj za pomocą macierzy $M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ dla wybranych przez siebie baz $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ przestrzeni V i W.

Zadanie 2. [20 pt] Rozpatrzmy przekształcenie liniowe $\phi_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zależne od parametru $t \in \mathbb{R}$, takie że mamy inkluzję

$$\ker(\phi_t) \supseteq \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - x_4 = 0\}$$

oraz

$$\phi_t(1, 0, 0, 1) = (2t, 1, 2),$$
$$\phi_t(0, 1, -1, 1) = (2, -1, 2t).$$

(a) Wypisz macierz przekształcenia ϕ_t w bazach standardowych $\mathbb{R}^4$ i $\mathbb{R}^3$.

(b) Dla jakich wartości parametru t wymiar jądra przekształcenia sprzężonego

$$\phi_t^* : (\mathbb{R}^3)^* \to (\mathbb{R}^4)^*$$

jest równy 1? Dla tych wartości parametru t, dla których $\dim \ker \phi_t^* = 1$ znajdź funkcjonał liniowy $\lambda_t \in (\mathbb{R}^3)^*$, który rozpina to jądro.

Odpowiedzi uzasadnij, przedstaw stosowne obliczenia.

UWAGA. Kolejne zadania znajdują się na drugiej stronie kartki.

Zadanie 3. [20 pt] Wykonaj poniższe zadania dotyczące wyznacznika macierzy kwadratowej.

(a) Policz wyznacznik następującej macierzy o współczynnikach w $\mathbb{Q}$; przedstaw przebieg obliczeń i wyjaśnij jakiej metody używasz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Czy macierz A jest odwracalna? Jeśli tak, to policz wyznacznik produktu $(2A) \cdot A^{\intercal} \cdot A^{-1}$. Wyjaśnij z jakich własności wyznacznika korzystasz.

(b) Rozpatrzmy następującą macierz o współczynnikach w $\mathbb{C}$

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & t^2+1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie $t \in \mathbb{C}$ jest parametrem. Rozstrzygnij, dla jakich wartości t macierz A_t jest odwracalna i znajdź jej odwrotność.

Zadanie 4. [10 pt] Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

(a) każdy wektor $v \in V$ ma jednoznaczne przedstawienie $v = v_1 + v_2$, gdzie $v_i \in V_i$, dla $i = 1, 2$,

(b) zachodzą równości $V = V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Zadanie 5. [20 pt] Niech $A, B \in M_{n\times n}(K)$ oraz niech $\phi, \psi \in L(K^n, K^n)$ będą przekształceniami liniowymi takimi, że $A = M(\phi)_{st}^{st}$ oraz $B = M(\psi)_{st}^{st}$.

(a) Wykaż, że jeśli dla pewnych macierzy $C, D \in M_{n\times n}(K)$ zachodzą równości

$$CA = B \quad \text{oraz} \quad DB = A,$$

wówczas $\ker(\phi) = \ker(\psi)$.

(b) Wykaż, że jeśli dla pewnych macierzy $E, F \in M_{n\times n}(K)$ zachodzą równości

$$AE = B \quad \text{oraz} \quad BF = A,$$

wówczas $\operatorname{im}(\phi) = \operatorname{im}(\psi)$.

(c) Wykaż, że jeśli $\ker(\phi) = \ker(\psi)$, to istnieją macierze $C, D \in M_{n\times n}(K)$ takie, że

$$CA = B \quad \text{oraz} \quad DB = A.$$

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL I Kolokwium drugie, 26 stycznia 2023

Podpisz niniejszą kartkę i wpisz w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 6. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6×5 pt]:

1. Dane są przekształcenia liniowe $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Czy musi istnieć niezerowy wektor $\alpha \in \mathbb{R}^5$ taki, że $\phi_1(\alpha) = \phi_2(\alpha)$?

2. Czy dla każdych macierzy $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ zachodzi $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Podaj uzasadnienie lub kontrprzykład (ze stosownymi przeliczeniami).

3. Rozpatrzmy macierz $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$ zadaną wzorem $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Czy istnieje macierz $B \in M_{4\times 3}(\mathbb{Q})$ taka, że $A \cdot B = I_3$, gdzie I_3 oznacza macierz jednostkową?

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL I Kolokwium drugie, 26 stycznia 2023

Podpisz niniejszą kartkę i wpisz w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 6 (c.d.)

4. Załóżmy, że przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$. jest zadane w standardowej bazie $\mathbb{Q}^3$ macierzą A, której współczynniki są równe 0 lub 1, lub 2. Załóżmy, że φ jest izomorfizmem. Czy przekształcenie liniowe $\varphi_3 : \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^3$ zadane za pomocą tej samej macierzy A, której współczynniki tym razem są traktowane jako elementy $\mathbb{Z}_3$, musi być izomorfizmem?

5. Załóżmy, że $\phi, \psi : V \to W$ to dowolne przekształcenia liniowe. Rozstrzygnij prawdziwość następujących stwierdzeń: $\ker(\phi + \psi) \subseteq \ker(\phi) \cap \ker(\psi)$ oraz $\ker(\phi + \psi) \supseteq \ker(\phi) \cap \ker(\psi)$. Odpowiedzi uzasadnij lub podaj kontrprzykłady.

6. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru 7 nad ustalonym ciałem K. Rozpatrzmy podprzestrzeń przestrzeni funkcjonałów $\Lambda \subset V^*$, $dim(\Lambda) = 4$. Wyznacz wymiar przestrzeni

$$\Lambda^{\perp} = \{w \in V : \forall_{\lambda \in \Lambda}\ \lambda(w) = 0\} \subset V.$$