GAL I Kolokwium pierwsze, 1 grudnia 2022, temat B

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
• Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko (WIELKIMI LITERAMI), numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania oraz literę tematu.

Zadanie 1. [18pt] Dla dowolnej liczby całkowitej r niech $f_r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją zadaną wzorem

$$f_r(z) = i^r \cdot z$$

oraz niech $A_r = f_r(A) = \{f_r(z) \,:\, z \in A\}$ będzie obrazem zbioru A przy funkcji f_r, przy czym

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} :\ \frac{\pi}{2} \leqslant arg(z) \leqslant \frac{3\pi}{2},\ |z| \leqslant \sqrt{2} \right\}.$$

(a) Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$\Big(A_3 \cup A_{-7} \Big) \cap \Big\{ z \in \mathbb{C} : |Im(z)| \leqslant 1 \Big\}$$

i zaznaczyć punkty charakterystyczne.

(b) Dla dowolnych liczb całkowitych r, s niech $A_r \cdot A_s = \Big\{ z_1 \cdot z_2 : z_1 \in A_r,\ z_2 \in A_s \Big\}$.
Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiór $A_3 \cdot A_6$ i zaznaczyć punkty charakterystyczne.

(c) Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $5 \cdot z^3 = -1$ zawarte w zbiorze A_1.

Zadanie 2. [18 pt] Niech $V_t = \mathrm{lin}((1,2,2,t),\ (1,1,2,2),\ (1,2,0,0)) \subset \mathbb{Q}^4$, gdzie $t \in \mathbb{Q}$ jest parametrem.

(a) Dla każdego t znaleźć wymiar przestrzeni V_t.

(b) Przedstawić V_t jako zbiór rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań zależnego od $t \in \mathbb{Q}$.

(c) Rozpatrując układ równań

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

znaleźć, w zależności od parametru t, te rozwiązania układu U, które należą do przestrzeni V_t.

Zadanie 3. [18 pt] Niech $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} \subset \mathbb{R}[x]$ oznacza przestrzeń wielomianów stopnia $\leqslant 4$, czyli wielomianów postaci $w = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, gdzie $a_0, \ldots, a_4 \in \mathbb{R}$. Niech $W \subset \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ oznacza zbiór tych wielomianów w stopnia $\leqslant 4$, dla których funkcje wielomianowe $\widetilde{w} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają warunek

$$\forall_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \quad x^4 \cdot \widetilde{w}\left(\frac{1}{x}\right) = \widetilde{w}(x)$$

(a) Przedstawić podzbiór $W \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ jako zbiór rozwiązań układu równań jednorodnych zadających relacje między współczynnikami $a_0, \ldots, a_4 \in \mathbb{R}$. Uzasadnić dlaczego W jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$.

(b) Rozpatrując wielomiany $w_1 = 1 + tx^2 + x^4$, $w_2 = sx^2$, $w_3 = 1 + tx - x^2 + tx^3 + x^4$ zależne od parametrów $s,\ t \in \mathbb{R}$ określić jakie warunki winny spełniać parametry s i t aby wielomiany w_1, w_2, w_3 stanowiły bazę przestrzeni W?

(c) W tym punkcie połóżmy $s = t = 1$. Znaleźć współrzędne wielomianu $x - 2x^2 + x^3$ w bazie przestrzeni W składającej się z $w_1,\ w_2$ i w_3 dla $t = s = 1$.

Uwaga. Dwa wielomiany w_1, w_2 należące do $\mathbb{R}[x]$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im funkcje wielomianowe $\widetilde{w_1}$ oraz $\widetilde{w_2}$ są identyczne.

Zadanie 4. [8 pt] Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Dla ustalonego $n \geqslant 2$ rozpatrzmy wektory $v_1, \ldots, v_n \in V$. Pokazać, że następujące zdania są równoważne.

(a) Wektory $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo zależne.

(b) Istnieje $j \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że wektor v_j jest kombinacją liniową wektorów v_i, dla $i \neq j$.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL I Kolokwium pierwsze, 1 grudnia 2022

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 5. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6 $\times$ 3 pt]:

1. Czy istnieje przestrzeń liniowa nad ciałem dwuelementowym $\mathbb{Z}_2$, która ma dokładnie sześć elementów? Odpowiedź uzasadnić.

2. Znaleźć wielomiany w_i o współczynnikach w $\mathbb{Z}_3$, dla których odpowiadające im funkcje wielomianowe $\widetilde{w}_i : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ stanowią bazę przestrzeni liniowej funkcji wielomianowych nad $\mathbb{Z}_3$. Odpowiedź uzasadnić.

3. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$ złożoną z ciągów o wyrazach rzeczywistych, czyli: $V = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}\}$. Rozpatrzmy podzbiór W przestrzeni V zdefiniowany w następujący sposób: $W = \{(a_i) : \forall_{i\in\mathbb{N}}\ a_{i+1} \leqslant a_i\}$. Czy W jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V? Odpowiedź uzasadnić.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL I Kolokwium pierwsze, 1 grudnia 2022

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 5 (c.d.)

4. Funkcja charakterystyczna $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ podzbioru $A \subseteq X$ zdefiniowana jest w następujący sposób:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in A \\ 0, & \text{gdy } x \notin A. \end{cases}.$$

Przypomnijmy, że zbiór funkcji $F(X, \mathbb{R})$ z dowolnego zbioru X o wartościach w $\mathbb{R}$ ma strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$. Pokazać, że dla dowolnego $n > 0$ funkcje charakterystyczne podzbiorów jednoelementowych $\chi_{\{i\}}$, gdzie $i = 1, \ldots n$, stanowią bazę przestrzeni $F(\{1, \ldots, n\}, \mathbb{R})$.

5. Załóżmy, że macierze $A_1,\ A_2 \in M_{m\times n}(\mathbb{Q})$ mają rzędy równe odpowiednio r_1 i r_2. Czy jest prawdą, że rząd macierzy $A_1 + A_2$ jest nie większy niż $\max(r_1, r_2)$? Odpowiedź uzasadnić.

6. W przestrzeni liniowej macierzy 2×2 o współczynnikach rzeczywistych rozpatrzmy zbiór macierzy rzędu 2, czyli $\mathcal{A} = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : r(A) = 2\}$. Czy $\operatorname{lin}(\mathcal{A}) = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$? Odpowiedź uzasadnić.