Kolokwium 2 z GAL, 27.01.2022. Rozwiązanie zadania 5

(a) Wiadomo, że część wspólna dowolnej rodziny podprzestrzeni przestrzeni liniowej jest podprzestrzenią. Wystarczy zatem wykazać, że dla dowolnej macierzy A zbiór $C(A)$ jest podprzestrzenią $M_{n\times n}(K)$. Niech $X, Y \in C(A)$ oraz $\lambda \in K$. Wówczas z łączności mnożenia oraz z rozdzielności w $M_{n\times n}(K)$ widzimy natychmiast, że spełnione są warunki bycia podprzestrzenią

$$A(X+Y) = AX + AY = XA + YA = (X+Y)A, \quad A(\lambda X) = \lambda AX = (\lambda X)A.$$

Wyznaczmy $C(E_{11})$. Zauważmy, że mnożenie przez E_{11} z lewej strony zeruje wszystkie wiersze poza pierwszym, a mnożenie przez E_{11} z prawej strony zeruje wszystkie kolumny poza pierwszą, tzn.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Do $C(E_{11})$ należą dokładnie te macierze $A = (a_{ij})$, dla których $E_{11} \cdot A = A \cdot E_{11}$, a zatem dokładnie te, które spełniają warunki $a_{i1} = a_{1j} = 0$, dla $2 \leqslant i, j \leqslant n$. Zatem $\dim C(A) = n^2 - 2n + 2$.

(b) Oczywiście $D_n(K) \subseteq C(D_n(K))$, bo łatwo sprawdzić, że iloczyn dowolnych macierzy diagonalnych nie zależy od kolejności mnożenia czynników. Pokażmy, że zachodzi inkluzja $C(D_n(K)) \subseteq D_n(K)$. Każda z macierzy $E_{11}, \dots, E_{nn}$ jest diagonalna, więc mamy $C(D_n(K)) \subseteq C(\{E_{11}, \dots, E_{nn}\})$. Okazuje się, że zbiór po prawej to $D_n(K)$, co uzasadniamy w następujący sposób. Analogicznie do dowodu (a) pokazujemy, że podprzestrzeń $C(E_{ii})$ złożona jest z macierzy $A = (a_{kl})$, które w i-tym wierszu lub i-tej kolumnie mogą mieć tylko jeden niezerowy wyraz – a_{ii}, czyli

$$A = (a_{kl}) \in C(E_{ii}) \quad \iff \quad a_{ki} = a_{il} = 0, \quad \text{dla } k, l \neq i.$$

W konsekwencji, macierz A należy do $C(\{E_{11}, \dots, E_{nn}\})$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia powyższy warunek dla każdego i, czyli gdy jest diagonalna. Zatem $C(D_n(K)) \subseteq C(\{E_{11}, \dots, E_{nn}\}) = D_n(K)$.

(c) Wykażemy, że $C(A) = \mathrm{lin}(I, A, A^2, \dots, A^{n-1})$. Pokażmy wpierw, że $\dim \mathrm{lin}(I, A, A^2, \dots, A^{n-1}) = n$. W tym celu trzeba dowieść, że układ $\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$ jest liniowo niezależny. Załóżmy przeciwnie. Gdyby jeden z elementów tego układu był kombinacją liniową pozostałych, tzn. gdyby $A^i = \sum_{s\neq i}^n a_s A^s$, dla pewnego $i \leqslant n$ oraz $a_s \in K$, to po przemnożeniu tej równości z prawej przez v dostalibyśmy liniową zależność układu $\{v, Av, \dots, A^{n-1}v\}$, co przeczy warunkom zadania.

Zauważmy dalej, że każda naturalna potęga macierzy A jest z nią przemienna, więc inkluzja $C(A) \supseteq \mathrm{lin}(I, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ jest oczywista. Wykażemy teraz przeciwną inkluzję.

Niech $B \in C(A)$. Skoro $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ tworzą bazę $M_{n\times 1}(K)$, to Bv jest kombinacją liniową tych elementów bazowych, tzn. dla pewnych $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in K$ mamy:

$$Bv = c_0 v + c_1 Av + \ldots + c_{n-1}A^{n-1}v = p(A)v,$$

gdzie

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1}.$$

Zauważmy też, że skoro B jest przemienna z A, to jest też przemienna z dowolną jej potęgą, czyli:

$$B \cdot (A^r v) = A^r B v = A^r p(A) v = p(A) \cdot (A^r v),$$

dla $r = 0, 1, \dots, n-1$ (oczywiście mamy też $A^r \cdot p(A) = p(A) \cdot A^r$). Pokazaliśmy zatem, że dla każdego wektora z bazy $\{v, Av, \dots, A^{n-1}v\}$ przestrzeni $M_{n\times 1}(K)$ przekształcenia liniowe: $\phi, \psi : M_{n\times 1}(K) \to M_{n\times 1}(K)$ dane w bazach standardowych odpowiednio macierzami B oraz $p(A)$ dają te same wartości. To znaczy, że przekształcenia te są tożsame, skąd $B = p(A) \in \mathrm{lin}(I, A, A^2, \dots, A^{n-1})$.

Komentarze

1. Tezę w (a) można rozszerzyć. Mianowicie dla dowolnej macierzy A rzędu 1 oraz dowolnego $\lambda \in K$ mamy $\dim C(A) = C(A+\lambda I) = n^2 - 2n + 2$. A nawet jeszcze więcej (to już jest zdecydowanie trudniejsze[1]):
   - jeśli $\dim C(A) = n^2 - 2n + 2$, to istnieje skalar $\lambda \in K$ oraz macierz E rzędu 1 taka, że $A = \lambda I + E$,
   - jeśli $\dim C(A) > n^2 - 2n + 2$, to $\dim C(A) = n^2$ i A jest macierzą skalarną, tzn. $A = \lambda I$.
2. Punkt (c) podaje opis sytuacji (jedynej), gdy $C(A) = E(A)$, gdzie $E(A)$ jest przestrzenią liniową rozpiętą przez naturalne potęgi A (tzw. algebra endomorfizmów macierzy A). Zrozumienie dla jakich macierzy rozmiaru n istnieje wektor/macierz v taki, jak w treści zadania, posiądziemy już wkrótce.
3. Problem wyznaczania $C(A)$ i badanie podzbiorów przemiennych macierzy w $M_{n\times n}(K)$ istnieje w zasadzie od początku teorii macierzy, którą datuje się na pracę Arthura Cayleya z 1858 roku: *A Memoir on The Theory of Matrices*[2] i jest to wciąż zagadnienie badane. Przykładowy przegląd zagadnień można znaleźć w prezentacji A. Gutermana: Matrix Centralizers and their Applications[3].
4. Jednym z najbardziej znanych klasycznych wyników teorii macierzy/endomorfizmów przemiennych jest tzw. twierdzenie o podwójnym centralizatorze. Mówi ono, że dla dowolnej macierzy kwadratowej A (o wyrazach w ciele) zachodzi równość
$$C(C(A)) = E(A).$$
   Wynik ten jest niemal z pewnością dziewiętnastowieczny i niemal na pewno należy do Frobeniusa. Więcej na ten temat poczytać można w klasycznej (i najważniejszej przez wiele dekad) książce o macierzach autorstwa Wedderburna[4]. Dowód przekracza ramy naszego wykładu (nawet na potoku gwiazdkowym nie byłoby łatwo go pokazać, bo o ile autorowi wiadomo dowód wymaga znajomości formy kanonicznej Frobeniusa, podczas gdy my poznamy jedynie – i to bez dowodu – formę Jordana) chyba, że ograniczylibyśmy się tylko do ciał algebraicznie domkniętych.
5. Z naszego punktu widzenia (a zwłaszcza na potoku gwiazdkowym) interesujące może być badanie przemienności pewnych klas przekształceń liniowych: rzutów, symetrii, przekształceń diagonalizowalnych, półprostych czy nilpotentnych (dwie z trzech wymienionych klas poznamy w drugim semestrze). Powód jest mniej więcej taki, że jak jakieś macierze/przekształcenia liniowe są przemienne, to pewne „operacje" da się na nich robić jednocześnie (kluczowy przykład to tzw. diagonalizowanie).
6. Badając pewne sprytnie sformułowane symetryczne macierze przemienne można pokazać (przy użyciu jeszcze kilku trików) niemal czysto algebroliniowy dowód zasadniczego twierdzenia algebry[5].

.

[1] Por. Watkins W.: *Linear Maps That Preserve Commuting Pairs of Matrices*, Linear Algebra Appl. 14 (1976), 29–35.
[2] Dostępna online: `https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1858.0002`.
[3] Slajdy można znaleźć w Sieci, ale jest też film: `https://youtu.be/Y6bPcSCUgeE`.
[4] J.H.M. Wedderburn, *Lectures on Matrices*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 17 (1934). (Twierdzenie 2., str. 113): `https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/matrices.pdf`. Do prac Frobeniusa też można dotrzeć, bo zostały wszystkie zebrane, ale były napisane w jednym z dwóch urzędowych języków XIX-wiecznej matematyki (a przynajmniej jej drugiej połowy, bo Gauss pisał jeszcze po łacinie), czyli w języku niemieckim.
[5] Rzadki typ dowodu, gdzie indukcję prowadzi się po wykładniku 2-adycznym, wiec bardzo polecam (za jakiś czas): `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/fundthmalg/fundthmalglinear.pdf`.