Kolokwium 2 z GAL, 27.01.2022

Zadanie 1. Rozpatrzmy przestrzenie liniowe $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$ i $Z = \mathbb{R}^4$ i ich przekształcenia liniowe $\phi_t : V \to W$, $\psi_s : W \to Z$, które są zależne od parametrów $s, t \in \mathbb{R}$. Przekształcenie ψ_s zadane jest wzorem

$$\psi_s(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + s \cdot x_2,\ x_3,\ -x_2,\ x_3)$$

natomiast przekształcenie ϕ_t przyjmuje następujące wartości

$$\phi_t(1, 1) = (-2, 0, 2 \cdot t), \quad \phi_t(-1, 1) = (0, 2, 0)$$

(a) Zapisz macierze przekształceń ϕ_t, ψ_s oraz $\psi_s \circ \phi_t$ w bazach standardowych.

(b) Znajdź wymiar jądra przekształcenia $\psi_s \circ \phi_t$ w zależności od parametrów t i s.

(c) Rozstrzygnij dla jakich wartości parametrów t i s obraz przekształcenia $\psi_s \circ \phi_t$ jest zawarty w przestrzeni
$$U = lin((1, -1, 0, 1),\ (0, 1, -1, -1),\ (0, 1, 0, -1)) \subset Z.$$

Każda odpowiedź wymaga uzasadnienia i przedstawienia odpowiednich obliczeń.

Zadanie 2. Niech $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie symetrią względem podprzestrzeni V_1 opisanej układem równań $x_1 + x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0$ wzdłuż podprzestrzeni $V_2 = lin((0, 1, 2, 0), (0, 1, 1, 0))$. Niech przekształcenie liniowe $\psi_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadane będzie wzorem zależnym od parametru $t \in \mathbb{R}$

$$\psi_t(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + tx_2, x_2 + tx_3, x_3 + tx_4, x_4 + tx_1)$$

(a) Znajdź bazę podprzestrzeni $\phi(V)$, gdzie $V = lin((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$.

(b) Rozstrzygnij czy wektor $v = (1, 0, 0, 0)$ znajduje się w obrazie przekształcenia ϕ, a jeśli tak, to znajdź jego przeciwobraz $\phi^{-1}(v)$.

(c) Rozstrzygnij dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $\phi \circ \psi_t \circ \phi \circ \psi_t \circ \phi$ jest izomorfizmem.

Każdą odpowiedź uzasadnij i przedstaw stosowne obliczenia.

Zadanie 3. Rozpatrzmy przestrzenie liniowe $V = \mathbb{Q}^4$, $W = \mathbb{Q}^3$ i przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$ takie, że
$$ker(\varphi) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$$
oraz
$$\varphi(1, 0, 0, 1) = (1, 1, 1) \quad \text{i} \quad \varphi(1, 1, 0, 1) = (1, -1, 0).$$

(a) Wypisz macierz przekształcenia φ w bazach standardowych przestrzeni V i W.

(b) Załóżmy, że funkcjonał $h \in W^*$ zadany jest wzorem $h(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3$. Opisz wzorem funkcjonał $\varphi^*(h) \in V^*$.

(c) Znajdź bazę jądra przekształcenia $\varphi^* : W^* \to V^*$.

Zadanie 4. Policz wyznacznik następującej macierzy o współczynnikach w $\mathbb{Q}$; przedstaw przebieg obliczeń i wyjaśnij jakiej metody użyłeś/łaś:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 76 & 77 & 78 & 79 & 80 \\ 1 & 1 & 3 & 81 & 82 & 83 & 84 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 86 & 87 & 88 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 89 & 90 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 91 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Policz wyznacznik produktu $(2A) \cdot A^\intercal \cdot A$, wyjaśnij z jakich własności wyznacznika skorzystałeś/łaś.

Zadanie 5a. Załóżmy, że ciało k jest równe $\mathbb{Z}_2$. Przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$ przestrzeni liniowych nad ciałem k jest w pewnych bazach tych przestrzeni zadane macierzą

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podaj wymiar jądra i wymiar obrazu przekształcenia φ. Odpowiedź uzasadnij: sformułuj twierdzenia, z ktorych korzystasz.

Zadanie 5b. Załóżmy, że dla pewnego przekształcenia liniowego przestrzeni liniowych $\varphi : V \to W_1 \oplus W_2$, dla każdego $i = 1,\ 2$ zachodzi inkluzja $W_i \subseteq im(\varphi)$. Pokaż, że przekształcenie φ jest epimorfizmem.

Zadanie 5c. Mamy dane trzy macierze 3×3 o współczynnikach zespolonych:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & -1 & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

gdzie $a, \ldots, f \in \mathbb{C}$ są ustalone. Policz $\det(A_3)$ jeśli wiesz, że $\det(A_1) = i$ oraz $\det(A_2) = \pi$. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5d. W przestrzeni $V = \mathbb{Q}^4$ rozpatrzmy podprzestrzenie

$$V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4 : x_3 = x_4 = 0\},\ V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4 : x_1 = x_2 = 0\}$$

Podaj przykład przekształcenia $\varphi : V \to \mathbb{Q}^3$, którego zawężenie (ograniczenie, obcięcie) do V_1 i V_2 jest monomorfizmem, ale które nie jest epimorfizmem. Napisz macierz tego przekształcenia w bazach standardowych.

Zadanie 6. Dla dowolnej macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$ niech $C(A) = \{B \in M_{n\times n}(K) : AB = BA\}$. Dla niepustego podzbioru $\mathcal{S} \subseteq M_{n\times n}(K)$ definiujemy ponadto:

$$C(\mathcal{S}) = \bigcap_{A\in\mathcal{S}} C(A).$$

(a) Uzasadnij, że dla każdego podzbioru $\mathcal{S} \subseteq M_{n\times n}(K)$ zbiór $C(\mathcal{S})$ jest podprzestrzenią $M_{n\times n}(K)$. Wyznacz $\dim C(E_{11})$, gdzie E_{11} jest macierzą, której jedyny niezerowy wyraz równy 1 znajduje się w pierwszym wierszu i w pierwszej kolumnie.

(b) Niech $D_n(K)$ będzie podzbiorem złożonym ze wszystkich macierzy diagonalnych w $M_{n\times n}(K)$. Pokaż, że $C(D_n(K)) = D_n(K)$.

(c) Załóżmy, że układ $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ jest bazą przestrzeni $M_{n\times 1}(K) \simeq K^n$, dla pewnego niezerowego $v \in M_{n\times 1}(K)$. Pokaż, że $\dim C(A) = n$.