Zadanie 5. Niech K będzie ciałem oraz niech $n > 1$. Podzbiór $\mathcal{S}$ w przestrzeni $M_{n\times n}(K)$ złożony jest ze wszystkich macierzy $S = (s_{ij})$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$, spełniających warunki $s_{ii} = 0$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $s_{ij} + s_{ji} = 1$, dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

(6p) Niech $K = \mathbb{Z}_2$. Rozstrzygnij czy $\mathcal{S}$ jest podprzestrzenią $M_{n\times n}(K)$ oraz wyznacz $\dim \operatorname{lin}(\mathcal{S})$.

(6p) Dla dowolnego $S \in \mathcal{S}$ wyznacz $r(S + S^T)$ oraz wykaż, że $r(S) \geqslant \frac{n-1}{2}$.

(4p) Niech $K = \mathbb{Q}$. Niech $\mathcal{S}_r$ będzie podzbiorem $\mathcal{S}$ złożonym z macierzy, dla których sumy wyrazów w każdym z n wierszy i sumy wyrazów w każdej z n kolumn są takie same. Wykaż, że n jest liczbą nieparzystą oraz dla każdej macierzy $R \in \mathcal{S}_r$ mamy $r(R) \geqslant \frac{n+1}{2}$.

Rozwiązanie. (a) Zauważmy, że macierz zerowa nie należy do $\mathcal{S}$, więc nie jest to podprzestrzeń $M_{n\times n}(K)$.

Pokażemy, że dla dowolnego ciała K wymiar przestrzeni $\operatorname{lin}(\mathcal{S}) \subset M_{n\times n}(K)$ to

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1.$$

Zaczniemy od intuicji, a potem przedstawimy formalny dowód. Każda macierz z $\operatorname{lin}(\mathcal{S})$ jest, niezależnie od ciała, wyznaczona jednoznacznie przed określenie czy poszczególne wyrazy pod przekątną równe są 0 czy 1 oraz przez określenie dowolnego wyrazu nad przekątną. Istotnie, wyrazy dowolnej macierzy $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}$ spełniają, dla $i \neq j$, warunki:

$$a_{12} + a_{21} = a_{ij} + a_{ji} = 1,$$

a zatem równości $c_{ji} = c_{ij} - c_{12} - c_{21}$, dla $j > i$, zachodzą dla każdej macierzy $C = (c_{ij})$ z $\operatorname{lin}(\mathcal{S})$. Intuicyjnie zatem układ opisujący macierze z $\operatorname{lin}(\mathcal{S})$ zależy od $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ parametrów i to jest właśnie wymiar $\operatorname{lin}(\mathcal{S})$.

Przejdźmy do dowodu (przykładowego, bo wychodząc z powyższych intuicji można wskazać bazę $\operatorname{lin}(\mathcal{S})$). Weźmy $C \in \operatorname{lin}(\mathcal{S})$. Mamy:

$$C = a_1 S_1 + a_2 S_2 + \ldots + a_k S_k,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_k \in K$ oraz $S_1, \ldots S_k \in \mathcal{S}$. A zatem wyrazy macierzy C spełniają warunki

$$c_{ij} + c_{ji} = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Oznacza to, że dla $c = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ wyrazy c_{ij} macierzy C są rozwiązaniami układu U_c postaci:

$$U_c : \begin{cases} c_{11} & = 0 \\ \quad\vdots & \\ c_{nn} & = 0 \\ c_{12} + c_{21} & = c \\ \qquad\vdots & \\ c_{n-1,n} + c_{n,n-1} & = c. \end{cases}.$$

Innymi słowy, układ U_c jest złożony z:

- n równań postaci $c_{11} = 0, \ldots, c_{nn} = 0$,
- $\frac{n(n-1)}{2}$ równań postaci $c_{ij} + c_{ji} = c$.

Rząd macierzy jednorodnego układu U_0 wynosi $n + \frac{n(n-1)}{2}$, bo każda z n^2 niewiadomych występuje tylko w jednym równaniu. Stąd wymiar przestrzeni rozwiązań W_0 układu U_0 to, zgodnie z tw. Kroneckera-Capellego

$$\dim W_0 = n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Wiemy z wykładu, że zbiór wszystkich macierzy spełniających niejednorodny układ U_1 ma tę własność, że różnica dowolnych dwóch macierzy z tego zbioru spełnia układ jednorodny U_0, czyli jest w W_0. Co więcej, jeśli dla $c \neq 0$ macierz M spełnia U_c, to macierz $c^{-1} \cdot M$ spełnia U_1. Oznacza to, że biorąc bazę W_0 oraz dowolną macierz $C \in \operatorname{lin}(\mathcal{S}) \setminus W_0$ dostajemy bazę $\operatorname{lin}(\mathcal{S})$. W szczególności:

$$\dim \operatorname{lin}(\mathcal{S}) = \dim W_0 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + 1.$$

Punkt (b) również rozwiążemy dla dowolnego ciała K. Weźmy dowolną macierz $S \in \mathcal{S}$. Wówczas S^T również należy do $\mathcal{S}$ oraz $r(S) = r(S^T)$ (przestrzeń wierszowa S to przestrzeń kolumnowa S^T). Zauważmy też, że macierz $S + S^T$ ma na przekątnej zera, a poza przekątną jedynki. Po dodaniu wszystkich wierszy do ostatniego dostajemy macierz tego samego rzędu, co $S + S^T$, następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}.$$

Odejmijmy teraz ostatnią kolumnę od wszystkich pozostałych. Dostajemy macierz w postaci schodkowej, której rząd równy jest rzędowi $S + S^T$ (oper. element. na wierszach i kolumnach nie zmieniają rzędu):

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{bmatrix}.$$

Rozważmy dwa przypadki. W pierwszym przypadku $n - 1 = kp = 0$ w ciele K charakterystyki[1] p, dzielącej $n - 1$. Wówczas macierz $S + S^T$ ma rząd $n - 1$. Drugi, interesujący nas przypadek jest taki, że $n - 1 \neq 0$ w ciele K, na przykład dla $K = \mathbb{Q}$. Wtedy macierz $S + S^T$ ma rząd n.

W dowodzie drugiej części korzystamy z tego, że dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}(K)$ zachodzi nierówność $r(A+B) \leqslant r(A)+r(B)$, występująca jako jedno z zadań w skrypcie (zad 5 na str. 41). Łatwo ją wyprowadzić samodzielnie, np. z argumentów przytoczonych Uwadze 2 niżej. Na mocy tej nierówności:

$$n - 1 = r(S + S^T) \leqslant r(S) + r(S^T) = 2r(S) \Longrightarrow \frac{n-1}{2} \leqslant r(S).$$

Aby rozwiązać (c) zauważmy najpierw, że oczywiście n jest liczbą nieparzystą, bo suma wszystkich wyrazów dowolnej macierzy w $\mathcal{S}_r$ równa jest $n(n-1)/2 = nk$, gdzie k jest wspólną sumą wyrazów w każdym wierszu (i kolumnie). Zatem $k = (n - 1)/2$. Ostatni punkt jest teraz oczywisty. Dla $K = \mathbb{Q}$ wiemy nawet, że rząd macierzy regularnej $R \in \mathcal{S}_r$ spełnia $r(R) \geqslant \frac{n}{2}$. Skoro n jest liczbą nieparzystą, a $r(R)$ – liczbą całkowitą, to mamy rzecz jasna $r(R) \geqslant \frac{n+1}{2}$. Uzyskane ograniczenie można poprawić[2]. ■

Uwaga 1. Macierze spełniające warunki określające zbiór $\mathcal{S}$ nazywamy **macierzami turniejowymi** (tournament matrices). Każda macierz ze zbioru $\mathcal{S}$ przedstawia wyniki turnieju, w którym bierze udział n graczy, i w którym w i-tym wierszu i j-tej kolumnie znajduje się wynik meczu pomiędzy i-tym, a j-tym graczem: 0, jeśli gracz i-ty przegrał i 1 – jeśli wygrał. Zbiór $\mathcal{S}_r$ to tzw. **regularne macierze turniejowe**.

Uwaga 2. Gdyby nam nikt nie powiedział (i sami byśmy na to nie wpadli), że rozmiar regularnej macierzy turniejowej jest liczbą nieparzystą, to można rozumować w następujący sposób. Załóżmy, wbrew tezie zadania, że dla pewnej macierzy $R \in \mathcal{S}_r$ mamy $r(R) = \frac{n}{2}$. Rząd R nie może być mniejszy, zgodnie z (b). Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ będzie zbiorem wierszy R, zaś $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ – zbiorem kolumn R. Wybierzmy z $\mathcal{A}$ bazę $\mathcal{W}$ przestrzeni $\mathrm{lin}(\mathcal{A})$ oraz z $\mathcal{B}$ wybierzmy bazę $\mathcal{K}$ przestrzeni $\mathrm{lin}(\mathcal{B})$. Obydwie te bazy mają, zgodnie z twierdzeniem o równości wymiarów przestrzeni wierszowej i kolumnowej, $n/2$ elementów. Zauważmy, że każdy element przestrzeni kolumnowej macierzy $R + R^T$ należy do $\mathrm{lin}(\mathcal{K} \cup \mathcal{W})$. Jednak $r(R + R^T) = n$, więc mamy $\dim \mathrm{lin}(\mathcal{K} \cup \mathcal{W}) = n$. To jest jednak niemożliwe. Skoro $R \in \mathcal{S}_r$, to przestrzenie kolumnowe macierzy R oraz R^T mają wspólną podprzestrzeń 1-wymiarową, rozpiętą przez niezerowy (ponieważ $K = \mathbb{Q}$) wektor $(n - 1, n - 1, \dots, n - 1)$. A zatem z formuły Grassmanna:

$$\dim \mathrm{lin}(\mathcal{W} \cup \mathcal{K}) = \dim \mathrm{lin}(\mathcal{W}) + \dim \mathrm{lin}(\mathcal{K}) - \dim(\mathrm{lin}(\mathcal{W}) \cap \mathrm{lin}(\mathcal{K})) \leqslant \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - 1 = n - 1.$$

Uzyskana sprzeczność kończy dowód. Zatem $r(R) \geqslant (n + 1)/2$.

[1] Ciało K ma charakterystykę p, jeśli $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{p} = 0$. Jeśli takie p nie istnieje, to mówimy, że K ma charakterystykę 0.

[2] Tezę punktu (c) można wzmocnić: w istocie każda regularna macierz turniejowa określona nad ciałem charakterystyki 0 ma rząd $n - 1$, patrz D. de Caen, *The Ranks of Tournament Matrices*, The American Mathematical Monthly, Nov., 1991, Vol. 98, No. 9 (Nov., 1991), pp. 829-831. Dowód nie jest trudny, ale wymaga metod, które poznamy w drugim semestrze.