GAL I Kolokwium 1, 2 grudnia 2021, **Losowy temat**

Zadanie 1. (16p) Niech $A = \{z \in \mathbb{C} : \sqrt{3} \cdot Re(z) \leqslant -Im(z) \leqslant 0\}$ oraz $A_r = A \cap \{z : |z| \leqslant r\}$.

(a) Na płaszczyźnie zespolonej naszkicuj zbiór A_2, zaznacz na rysunku punkty charakterystyczne na brzegu tego zbioru i wypisz odpowiadające im liczby zespolone.

(b) Rozpatrzmy funkcję $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ daną wzorem $\varphi(z) = z^2 + 2$. Na rysunku z punktu (a) naszkicuj zbiór $\varphi(A_1)$, zaznacz punkty charakterystyczne na brzegu tego zbioru i wypisz odpowiadające im liczby zespolone.

(c) Wyznacz wszystkie pierwiastki stopnia 15 z jedynki należące do zbioru $A_2 \cup \overline{A}_2$, gdzie $\overline{A}_2 = \{\overline{z} : z \in A_2\}$. Które z wyznaczonych pierwiastków są pierwotne?

(d) Dla jakich $r \in \mathbb{R}$ równanie $x^3 = 2+2i$ ma rozwiązanie należące do zbioru A_r? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2. (16p) W przestrzeni $V = \mathbb{Q}^4$ rozpatrzmy podprzestrzeń liniową $V_1 \subset V$ rozpiętą przez wektory $(1, 0, 0, t)$ i $(1, 1, 0, 0)$, gdzie $t \in \mathbb{Q}$ jest parametrem, oraz podprzestrzeń $V_2 \subset V$ będącą zbiorem rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} .$$

(a) Znajdź wymiar przestrzeni $V_1 \cap V_2$ w zależności od parametru t.

(b) Dla jakich wartości parametru t zachodzi równość $V = V_1 \oplus V_2$?

(c) Znajdź bazę przestrzeni $V_1 + V_2$ w zależności od parametru t.

(d) Rozstrzygnij dla jakiej wartości parametru $t \in \mathbb{Q}$ wektor $(0, 1, 0, 1)$ należy do sumy $V_1 + V_2$.

Zadanie 3. (16p) Rozpatrzmy niejednorodny układ równań liniowych U o współczynnikach w ciele $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} .$$

(a) Przedstaw zbiór rozwiązań układu U w postaci $v + W$, dla $v \in \mathbb{Q}^4$ oraz podprzestrzeni $W \subseteq \mathbb{Q}^4$.

(b) Znajdź bazę podprzestrzeni $\operatorname{lin}(v) + W \subseteq \mathbb{Q}^4$.

(c) Znajdź jednorodny układ równań liniowych opisujący podprzestrzeń

$$\operatorname{lin}((0, 0, 1, -1), (1, -1, 0, 0), (1, t, 1, 1)) \subseteq \mathbb{Q}^4,$$

gdzie $t \in \mathbb{Q}$ jest parametrem.

Zadanie 4a. (4p) Ile rozwiązań w $\mathbb{Z}_5^3$ ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{Z}_5$? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4b. (4p) Rozpatrzmy macierze $A,\ B,\ C \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ zadane wzorem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dla jakich wartości parametrów $t,\ s \in \mathbb{Q}$ macierze te tworzą układ liniowo zależny w przestrzeni macierzy 2×2 nad ciałem $\mathbb{Q}$? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4c. (4p) Załóżmy, że do zbioru pierwiastków zespolonych niezerowego wielomianu $f \in \mathbb{R}[x]$ należą liczby $2, 1 + i$, oraz $\sqrt{2}$. Podaj najmniejszy możliwy stopień wielomianu f. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4d. (4p) Załóżmy, że U jest układem pięciu równań z trzema niewiadomymi o współczynnikach z $\mathbb{Q}$. Załóżmy ponadto, że rząd macierzy współczynników układu U jest równy 2 oraz trójki $(1, 1, 1)$ i $(1, 2, 1)$ są rozwiązaniami tego układu równań. Rozstrzygnij czy trójka $(1, 1, 2)$ jest rozwiązaniem układu równań U. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5. (16p) Niech K będzie ciałem oraz niech $n > 1$. Podzbiór $\mathcal{S}$ w przestrzeni $M_{n\times n}(K)$ złożony jest ze wszystkich macierzy $S = (s_{ij})$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$, spełniających warunki $s_{ii} = 0$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $s_{ij} + s_{ji} = 1$, dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

(a) Niech $K = \mathbb{Z}_2$. Rozstrzygnij czy $\mathcal{S}$ jest podprzestrzenią $M_{n\times n}(K)$ oraz wyznacz $\dim \operatorname{lin}(\mathcal{S})$.

(b) Niech $K = \mathbb{Q}$. Dla dowolnej macierzy S ze zbioru $\mathcal{S}$ wyznacz $r(S + S^T)$, gdzie S^T jest macierzą transponowaną do macierzy S, oraz wykaż, że $r(S) \geqslant \frac{n-1}{2}$.

(c) Niech $K = \mathbb{Q}$. Niech $\mathcal{S}_r$ będzie podzbiorem $\mathcal{S}$ złożonym z macierzy, dla których sumy wyrazów w każdym z n wierszy i sumy wyrazów w każdej z n kolumn są takie same. Wykaż, że n jest liczbą nieparzystą oraz dla każdej macierzy $R \in \mathcal{S}_r$ mamy $r(R) \geqslant \frac{n+1}{2}$.