GAL I Kolokwium 2, 23 stycznia 2021, **Losowy temat**

Zadanie 1. (20p) W przestrzeni $\mathbb{Q}^4$ rozpatrzmy następujące wektory $v_1 = (1, t, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, -1)$, $w_1 = (1, 1, s, 0)$, $w_2 = (0, 1, 1, 0)$, gdzie $s,\ t \in \mathbb{Q}$ są parametrami. Niech $V,\ W \subset \mathbb{Q}^4$ będą podprzestrzeniami rozpiętymi przez wektory $v_1,\ v_2$ oraz, odpowiednio, $w_1,\ w_2$. Dla jakich wartości parametrów $s,\ t$ przestrzeń $\mathbb{Q}^4$ jest sumą prostą tych podprzestrzeni? Dla jakich wartości parametrów $s,\ t$ istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}$ takie, że $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) = \varphi(w_1) = \varphi(w_2) = 1$? Odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie 2. (20p) Niech $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie symetrią względem podprzestrzeni V_1 opisanej układem równań $x_1 - x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0$ wzdłuż podprzestrzeni $V_2 = lin((1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 0))$.

(a) Znaleźć bazę podprzestrzeni $\phi(V)$, gdzie $V = lin((1, 1, -1, 4), (1, 2, -1, 0))$.

(b) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $\phi \circ \psi_t$ jest izomorfizmem, gdzie $\psi_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadane jest wzorem: $\psi_t(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + tx_3, x_2 + tx_4, x_3 + tx_1, x_4 + tx_2)$.

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3. (20p) Rozpatrzmy przestrzenie liniowe $V = \mathbb{Q}^4$, $W = \mathbb{Q}^3$ i przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$ zadane wzorem $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_4, -x_2 - x_3 + x_4, x_1 - x_3)$. Znajdź $k = \dim ker(\varphi)$ i $r = \dim im(\varphi)$. Następnie znajdź taką bazę $\mathcal{A}$ przestrzeni V i taką bazę $\mathcal{B}$ przestrzeni W, żeby macierz przekształcenia φ w tych bazach miała pierwszych k kolumn składających się z zer i ostatnie $3-r$ wiersze były zerowe oraz jej pod-macierz $r \times r$ w prawym górnym rogu była macierzą jednostkową, czyli miała następującą postać blokową

$$\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie I_r jest macierzą jednostkową $r \times r$. Odpowiedzi uzasadnij, przedstaw odpowiednie obliczenia.

Zadanie 4. (20p) Policz wyznacznik następującej macierzy; przedstaw przebieg obliczeń i wyjaśnij jakiej metody użyłeś/łaś:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & 7 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Policz wyznacznik produktu $(2A) \cdot A \cdot A$, wyjaśnij z jakich własności wyznacznika skorzystałeś/łaś.

Zadanie 5a. (5p) Rozstrzygnij czy macierz

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

jest odwracalna. Odpowiedź uzasadnij, sformułuj twierdzenie na które się powołujesz.

Zadanie 5b. (5p) Podaj przykład przestrzeni liniowej W wymiaru skończonego $d \geqslant 4$, która zawiera trzy podprzestrzenie $V_1,\ V_2,\ V_3 \subset W$, takie że $W = V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_3 = V_2 \oplus V_3$. Jakie warunek musi spełnić liczba d, żeby taki przykład istniał? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5c. (5p) Rozpatrzmy trzy przestrzenie liniowe $V,\ W,\ Z$ i przekształcenia liniowe $\phi : V \to W$, $\psi : W \to Z$. Pokaż, że jeśli ϕ i ψ są epimorfizmami, to ich złożenie $\psi \circ \phi$ też jest epimorfizmem. Czy prawdą jest twierdzenie odwrotne: o ile $\psi \circ \phi$ jest epimorfizmem, to zarówno ϕ jak i ψ jest epimorfizmem? Odpowiedź uzasadnij: jeśli odpowiedź jest negatywna, to podaj odpowiedni przykład.

Zadanie 5d. (5p) Załóżmy, że przestrzeń liniowa V jest sumą prostą swoich podprzestrzeni $V = V_1 \oplus V_2$ i $p_i : V \to V_i$ dla $i = 1, 2$ są rzutami na te podprzestrzenie. Niech $\phi : W \to V$ będzie przekształceniem liniowym takim, że dla $i = 1, 2$ złożenie $p_i \circ \phi$ jest epimorfizmem. Czy ϕ jest epimorfizmem? Odpowiedź uzasadnij: jeśli odpowiedź jest negatywna, to podaj odpowiedni przykład.

Zadanie 6. (20p) Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem nad ciałem K.

(a) Niech U będzie podprzestrzenią V. Pokazać, że dla każdego funkcjonału $f \in U^*$ istnieje funkcjonał $\overline{f} \in V^*$ taki, że $\overline{f}(u) = f(u)$, dla każdego $u \in U$.

(b) Niech U_i będą podprzestrzeniami V, zaś $f_i \in (U_i)^*$, dla $i = 1, 2$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

- Istnieje $\overline{f} \in (U_1 + U_2)^*$ taki, że $\overline{f}(u_i) = f_i(u_i)$, dla każdych $u_i \in U_i$, dla $i = 1, 2$.
- Jeśli $u_1 + u_2 = 0$, dla $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$, to $f_1(u_1) + f_2(u_2) = 0$.
- Dla każdego $u \in U_1 \cap U_2$ mamy $f_1(u) = f_2(u)$.

(c) Wskazać przykład przestrzeni V nad ciałem K, podprzestrzeni $U_i \subseteq V$ oraz funkcjonałów $f_i \in (U_i)^*$, dla $i = 1, 2, 3$, takich, że $f_i(u) = f_j(u)$, dla $i \neq j$ oraz dowolnego $u \in U_i \cap U_j$, ale nie istnieje funkcjonał $\overline{f} \in (U_1 + U_2 + U_3)^*$ taki, że $\overline{f}(u_i) = f_i(u_i)$, dla dowolnych $u_i \in U_i$ oraz $i = 1, 2, 3$.