# GAL I Kolokwium 1, 5 grudnia 2020, **Losowy temat**

**Zadanie 1. (16p)** Rozpatrzmy następujące zbiory na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$:

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} : re(z) \leqslant 0,\ im(z) \geqslant 0,\ |z| \leqslant 8\}$$

oraz

$$A_d = \{z \in \mathbb{C} : z^d \in A_1\},\ \text{dla } d = 1,\ 2,\ 3, \ldots.$$

(a) Narysuj na płaszczyźnie zespolonej zbiór $A_3$ oraz jego sprzężenie $\overline{A_3} = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in A_3\}$, zaznacz na rysunku punkty charakterystyczne identyfikujące położenie tego zbioru.

(b) Naszkicuj obraz zbioru $A_1$ po zastosowaniu funkcji $f(z) = \frac{1}{32} \cdot i \cdot z^2 - 1$.

(c) Wypisz te rozwiązania równania $z^7 = 567$, które należą do $A_1$.

**Zadanie 2. (16p)** Niech $V \subset \mathbb{Q}^4$ będzie przestrzenią liniową rozpiętą przez wektory $(1,\ 1,\ 2,\ t)$, $(1,\ 2,\ 2,\ 1)$, $(1,\ 0,\ 1,\ 0)$, gdzie $t \in \mathbb{Q}$ jest parametrem. Znajdź wymiar przestrzeni $V$ w zależności od parametru $t$. Przedstaw przestrzeń $V$ jako zbiór rozwiązań pewnego jednorodnego układu równań. Rozpatrzmy układ równań $U$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 3 \end{cases}.$$

Znajdź, w zależności od parametru $t$, te rozwiązania układu $U$, które należą do przestrzeni $V$.

**Zadanie 3. (16p)** Przypomnienie: kwadratowa macierz $A = [a_{ij}]$ jest symetryczna jeśli dla każdej pary indeksów $i,\ j$ zachodzi $a_{ij} = a_{ji}$. Rozpatrzmy trzy macierze symetryczne $2 \times 2$ o współczynnikach w $\mathbb{Q}$ z parametrami $s$ i $t$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & s \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dla jakich wartości parametrów $s$ i $t$ macierze $A,\ B,\ C$ rozpinają przestrzeń macierzy symetrycznych $2 \times 2$ nad $\mathbb{Q}$?

(b) Dla jakich wartości parametrów $s$ i $t$ macierz $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ jest kombinacją liniową macierzy $B$ i $C$?

(c) Niech $V \subseteq \mathbb{Q}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań równania ze zmiennymi $x_i$ i współczynnikami, które są przedstawione w postaci macierzy zdefiniowanych powyżej

$$x_1 \cdot A + x_2 \cdot B + x_3 \cdot C + x_4 \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Znajdź wymiar przestrzeni $V$ w zależności od parametrów $s$ i $t$.

**Zadanie 4a. (4p)** Niech liczba naturalna $d$ będzie stopniem wielomianu $f \in \mathbb{R}[x]$ którego zespolonymi pierwiastkami są wszystkie pierwiastki wielomianu $x^4+x^3+x^2+x+1$ oraz liczby zespolone $7+i$ i $-7+i$. Podaj ograniczenie dolne na $d$; odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 4b. (4p)** Ile rozwiązań ma następujący układ równań o współczynnikach w $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{cases} \quad ?$$

Odpowiedź uzasadnij powołując się na odpowiednie twierdzenia z wykładu.

**Zadanie 4c. (4p)** Załóżmy, że wektory $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ stanowią bazę pewnej przestrzeni $V$ nad ciałem $\mathbb{Q}$. Rozpatrzmy wektor $\beta = -\alpha_1 + 7\alpha_2 - 3\alpha_3$. Czy wektory $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta$ stanowią bazę $V$? Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 4d. (4p)** Załóżmy, że macierze $A_1,\ A_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{Q})$ są rzędu, odpowiednio, $r_1$ i $r_2$. Podaj przykład macierzy $A_1$ i $A_2$, dla których rząd sumy $A_1 + A_2$ jest większy niż $\max(r_1,\ r_2)$. Podaj przykład $A_1$ i $A_2$, dla których rząd sumy $A_1 + A_2$ jest mniejszy niż $\min(r_1,\ r_2)$.

**Zadanie 5. (16p)** Dla każdego $r \in \mathbb{R}$ oznaczmy przez $rMag_n(\mathbb{R})$ zbiór macierzy $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ takich, że suma wyrazów w każdym wierszu równa jest sumie wyrazów w każdej kolumnie, a także sumie wyrazów na każdej z przekątnych, i wynosi $r$. Sumę mnogościową wszystkich zbiorów postaci $rMag_n(\mathbb{R})$, dla $r \in \mathbb{R}$, oznaczamy przez $Mag_n(\mathbb{R})$.

(a) Znaleźć układy $U_1, U_2$ liniowych równań jednorodnych o $n^2$ niewiadomych opisujące odpowiednio wyrazy macierzy w $0Mag_n(\mathbb{R})$ oraz w $Mag_n(\mathbb{R})$.

(b) Wyznaczyć $\dim(0Mag_3(\mathbb{R}))$.

(c) Wykazać, że dla $n \geqslant 1$ zachodzi równość $\dim(0Mag_n(\mathbb{R})) + 1 = \dim(Mag_n(\mathbb{R}))$.