GAL, Kolokwium 2, 20 stycznia 2020, **rozwiązania**

Zadanie 1. [18 punktów] Przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ zadane jest wzorem

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4,\ x_1 - x_3 + x_4,\ 3x_1 + x_2 + x_4).$$

(a) Znaleźć bazę przestrzeni $\ker(\varphi)$.

(b) Wyznaczyć macierz $M(\varphi)_{st}^{\mathcal{A}}$, gdzie

$$\mathcal{A} = (\alpha_1 = (1, 1, 0),\ \alpha_2 = (0, 1, 2),\ \alpha_3 = (0, 0, 1)).$$

(c) Znaleźć, o ile to możliwe, bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ i $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ takie, że macierz $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ ma dokładnie dwa niezerowe współczynniki.

Rozwiązanie. (a): Jądro φ to przestrzeń rozwiązań układu równiań liniowych jednorodnych o macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

czyli równoważny układ równań w postaci schodkowej to

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Przyjmujemy za zmienne wolne x_3, x_4 i kładąc $(x_3, x_4) = (1, 0)$ oraz $(x_3, x_4) = (0, 1)$ otrzymujemy wektory

$$\beta_3 = (1, -3, 1, 0), \qquad \beta_4 = (-1, 2, 0, 1),$$

które stanowią bazę $\ker(\varphi)$.
(b): Skorzystamy z tożsamości $M(\varphi)_{st}^{\mathcal{A}} = M(id)_{st}^{\mathcal{A}} \cdot M(\varphi)_{st}^{st}$. Mamy

$$M(id)_{st}^{\mathcal{A}} = \left(M(id)_{\mathcal{A}}^{st}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Liczymy macierz odwrotną:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Ostatecznie

$$M(\varphi)_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

(c): Uzupełniamy bazę (β_3, β_4) podprzestrzeni $\ker(\varphi)$ do bazy, np. wektorami $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ i $e_2 = (0, 1, 0, 0)$. Łatwo sprawdzić, że macierz układu $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \beta_3, \beta_4)$ jest nieosobliwa (bo jest trójkątna z jedynkami na przekątnej), a więc $\mathcal{B}$ jest bazą. Mamy

$$\gamma_1 := \varphi(e_1) = (1, 1, 3)$$
$$\gamma_2 := \varphi(e_2) = (1, 0, 1)$$

oraz oczywiście $\varphi(\beta_3) = \varphi(\beta_4) = 0$. Niech $\gamma_3 \in \mathbb{R}^3$ będzie dowolnym wektorem nienależącym do $\text{lin}(\gamma_1, \gamma_2)$, np. $\gamma_3 = (1, 0, 0)$. Wówczas $\mathcal{C} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ jest bazą $\mathbb{R}^3$ oraz

$$M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 2. [18 punktów] Dana jest baza $\mathcal{A} = (\alpha_1 = (0,1,-2),\ \alpha_2 = (1,1,-1),\ \alpha_3 = (0,1,-1))$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz dla każdego $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ zadane jest macierzą

$$\mathcal{M}(\varphi_t)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 2 & t & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dla jakich t przekształcenie φ_t jest izomorfizmem?

(b) Wyznaczyć $\varphi_0(1,2,3)$.

(c) Niech $\psi \in (\mathbb{R}^3)^*$ będzie funkcjonałem liniowym zadanym wzorem $\psi(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) = x_1 + 2x_2 - x_3$. Znaleźć współrzędne funkcjonału $\varphi_3^*(\psi)$ w bazie sprzężonej do bazy $\mathcal{A}$.

Rozwiązanie. (a) Ze wzoru Sarrusa wynika, że

$$\det(\mathcal{M}(\varphi_t)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}) = -t - 2 + 2t - (-t^2 + 2 - 2) = t^2 + t - 2 = (t-1)(t+2)$$

a więc $\det(\mathcal{M}(\varphi_t) = 0$ dla $t \in \{1, -2\}$. Wobec tego φ_t jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$.

(b) Znajdziemy współrzędne wektora $(1,2,3)$ w bazie $\mathcal{A}$. Równość $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = (1,2,3)$ jest równoważna z układem równań o macierzy rozszerzonej

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

a więc współrzędne $(1,2,3)$ w bazie $\mathcal{A}$ to $(-5,1,6)$. Wektor $\varphi_0(1,2,3)$ ma w bazie $\mathcal{A}$ współrzędne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a więc $\varphi_0(1,2,3) = -4\alpha_1 + 2\alpha_2 = (2,-2,6)$.

(c) Współrzędne $\varphi_3^*(\psi)$ w bazie sprzężonej do $\mathcal{A}$ to wartości tego funkcjonału na wektorach z $\mathcal{A}$, czyli $\varphi_3^*(\psi)(\alpha_i) = \psi(\varphi_3(\alpha_i))$ dla $i = 1,2,3$. Mamy

$$\begin{aligned} \psi(\varphi_3(\alpha_1)) &= \psi(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3) = 1 + 2 \cdot 2 - (-1) = 6 \\ \psi(\varphi_3(\alpha_2)) &= \psi(\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3) = 1 + 2 \cdot 3 - 1 = 6 \\ \psi(\varphi_3(\alpha_3)) &= \psi(3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3) = 3 + 2 \cdot 2 - (-1) = 8, \end{aligned}$$

a więc szukane współrzędne to $(6,6,8)$.

Zadanie 3. [18 punktów] Dane są macierze $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ oraz $B, C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ postaci

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 17 \\ 13 & 11 & -7 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Obliczyć $\det(A)$.

(b) Wiadomo, że macierz B jest odwracalna. Obliczyć $\det(B^{-1}CB^TC)$.

Rozwiązanie. (a) Załóżmy, że $n > 1$. Odejmujemy pierwszy wiersz macierzy A od pozostałych i otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & n-2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

Następnie od ostatniego wiersza odejmujemy wiersze $2, 3, \dots, n-1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

gdzie $a = (n-1) - 1 - 2 - 3 - \cdots - (n-2) = (n-1) - (n-1)(n-2)/2 = -(n-1)(n-4)/2$. Powyższe operacje nie zmieniają wyznacznika, a uzyskana macierz jest trójkątna; mamy więc

$$\det(A) = (n-2)!(-(n-1)(n-4))/2 = -(n-1)!(n-4)/2.$$

(b) Ze wzoru Sarrusa otrzymujemy $\det(C) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Ponieważ wyznacznik odwrotności to odwrotność wyznacznika i transpozycja nie zmienia wyznacznika, uzyskujemy

$$\det(B^{-1}CB^TC) = \det(B^{-1})\det(C)\det(B^T)\det(C) = \det(C)^2\det(B)^{-1}\det(B) = \det(C)^2 = 576.$$

Zadanie 4. [10 punktów] Niech V, W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K. Układ $\mathcal{A}$ jest bazą V, a układ $\mathcal{B}$ jest bazą W. Wykazać, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $\varphi : V \longrightarrow W$ zachodzi

$$M(\varphi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} = \left(M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T,$$

gdzie $\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*$ jest przekształceniem sprzężonym do φ, a $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{B}^*$ są bazami sprzężonymi do $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Rozwiązanie. Oznaczmy $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$, $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$. Niech (a_{ij}) będą współczynnikami macierzy $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \in M_{m\times n}(K)$, a (b_{ij}) — współczynnikami macierzy $M(\varphi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} \in M_{n\times m}(K)$. Współczynnik b_{ij} to i-ta współrzędna funkcjonału $\varphi^*(\beta_j^*)$ w bazie $\mathcal{A}$, gdzie β_j^* jest j-tym funkcjonałem z bazy $\mathcal{B}^*$. Mamy więc

$$b_{ij} = \varphi^*(\beta_j^*)(\alpha_i) = \beta_j^*(\varphi(\alpha_i)) = \beta_j^*(a_{1i}\beta_1 + a_{2i}\beta_2 + \cdots + a_{mi}\beta_m) = a_{ji},$$

co dowodzi tezy.

Zadanie 5. [18 punktów] Niech K będzie ciałem oraz niech $M_{n\times n}(K)$ będzie przestrzenią liniową macierzy kwadratowych $n \times n$ nad ciałem K.

(a) Niech $A \in M_{n\times n}(K)$ będzie niezerową macierzą. Wykazać, że istnieje osobliwa macierz $B \in M_{n\times n}(K)$ taka, że macierz $A + B$ jest nieosobliwa.

(b) Niech $T : M_{n\times n}(K) \longrightarrow M_{n\times n}(K)$ będzie przekształceniem liniowym mającym tę własność, że dla każdej $A \in M_{n\times n}(K)$ zachodzi równość $\det(A) = \det(T(A))$. Pokazać, że T jest izomorfizmem. Można zakładać, że punkt (a) jest spełniony.

Rozwiązanie. (a) Wybierzmy n-wymiarową przestrzeń liniową V nad ciałem K i pewną jej bazę $\mathcal{A}$. Niech $\varphi : V \longrightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = A$. Następnie wybierzmy przedstawienia

$$V = \ker(\varphi) \oplus W = \operatorname{im}(\varphi) \oplus W'.$$

Oczywiście $W \neq 0$, bo φ jest niezerowym przekształceniem. Ponieważ $\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{im}(\varphi)) = n$, mamy $\dim(W') = \dim(\ker(\varphi))$, a więc istnieje izomorfizm $\psi' : \ker(\varphi) \longrightarrow W'$, który rozszerza się jednoznacznie do przekształcenia liniowego $\psi : V \longrightarrow V$ takiego, że $V|_{\ker(\varphi)} = \psi'$ oraz $V|_W = 0$. Niech $B = M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$. Macierz B jest osobliwa, bo $\ker(\psi) = W \neq 0$. Ponadto

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)(\ker(\varphi)) &= \psi(\ker(\varphi)) = \psi'(\ker(\varphi)) = W',\\ (\varphi + \psi)(W) &= \varphi(W) = \operatorname{im}(\varphi).\end{aligned}$$

Stąd $V = \operatorname{lin}(W' \cup \operatorname{im}(\varphi)) \subseteq \operatorname{im}(\varphi + \psi)$, a więc $\varphi + \psi$ jest epimorfizmem. Z porównania wymiarów wynika, że jest również izomorfimem, a więc macierz $A + B = M(\varphi + \psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest nieosobliwa.

(b) Niech $A \in M_{n\times n}$ będzie niezerową macierzą. Z punktu (a) wynika, że istnieje osobliwa macierz B taka, że $A+B$ jest nieosobliwa. Jeśli $T(A) = 0$, to mamy

$$0 \neq \det(A + B) = \det(T(A + B)) = \det(T(A) + T(B)) = \det(T(B)) = \det(B).$$

Ale to niemożliwe, bo macierz B jest osobliwa. Stąd $\ker(T) = 0$, a więc T jest izomorfizmem.

Uwagi.
W 1897 roku Frobenius udowodnił, że jeśli przekształcenie liniowe $T : M_{n\times n}(K) \longrightarrow M_{n\times n}(K)$ spełnia dla każdej $A \in M_{n\times n}(K)$ warunek $\det(A) = \det(T(A))$ z punktu (b), to nie tylko jest izomorfizmem, ale jest albo postaci $\phi(A) = MAN$, albo postaci $\phi(A) = MA^TN$, gdzie M, N są macierzami nieosobliwymi takimi, że $\det(MN) = 1$.

A gdyby żądać jedynie, by przekszałcenie T przeprowadzało macierze o zerowym wyznaczniku ma macierze o zerowym wyznaczniku? Wówczas sprawa robi się bardziej skomplikowana. W 1949 roku słynny francuski matematyk Dieudonné pokazał, że jeśli założymy dodatkowo, że T jest izomorfizmem, to T musi być (ponownie) jednej z dwóch postaci: $T(X) = UXV$ lub $T(X) = UX^TV$, dla ustalonych macierzy nieosobliwych U, V. Ale czy T musi być izomorfizmem? Okazuje się, że nie. Jeśli K jest ciałem algebraicznie domkniętym, to można pokazać, że takie przekształcenie T jest albo izomorfizmem, albo przeprowadza każdą macierz z $M_{n\times n}(K)$ (nie tylko osobliwe) na macierz osobliwą. Założenia o algebraicznej domkniętości ciała nie da się nietrywialnie osłabić.

Jeśli nad ciałem algebraicznie domkniętym K zażądamy, aby przekształcenie liniowe $T : M_{n\times n}(K) \longrightarrow M_{n\times n}(K)$ przeprowadzało macierze nieosobliwe w nieosobliwe, to można pokazać, że T musi także przeprowadzać macierze osobliwe w osobliwe, i dodatkowo musi to już być izomorfizm. Dowód jest trudniejszy niż w (b), ale wymaga jedynie znajomości materiału z początku drugiego semestru kursu GALu. Źródło: P. Botta *Linear maps that preserve singular and nonsingular matrices*, Linear Algebra and its Applications, 20 (1978), str. 45-49.

Zadanie 6. [3 punkty za każde zadanie]

(a) Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ takie, że $\operatorname{im}(\varphi) = \ker(\varphi)$?

Rozwiązanie. Mamy $\dim(\operatorname{im}(\varphi)) + \dim(\ker(\varphi)) = 5$, więc $\ker(\varphi)$ i $\operatorname{im}(\varphi)$ mają różne wymiary, nie mogą więc być równe.

(b) Dane jest przekształcenie liniowe $\varphi : V \longrightarrow W$ pomiędzy skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem liczb wymiernych. Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą przestrzeni V. Czy zawsze istnieje baza $\mathcal{B}$ przestrzeni W taka, że wszystkie współczynniki macierzy $\mathcal{M}(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ są całkowite?

Rozwiązanie. Taka baza zawsze istnieje. Wybierzmy dowolną bazę $\mathcal{C} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ przestrzeni W. Wszystkie współczynniki macierzy $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ są wymierne, więc istnieje $0 < k \in \mathbb{Z}$ takie, że macierz $k\cdot M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$ ma wszystkie współczynniki całkowite. Weźmy bazę $\mathcal{B} = (\frac{1}{k}\gamma_1, \frac{1}{k}\gamma_2, \ldots, \frac{1}{k}\gamma_n)$. Wówczas

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = M(id_W)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = k \cdot I^n \cdot M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = k \cdot M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}.$$

(c) Dane są macierze $A \in M_{n\times n}(K)$ i $B \in M_{n\times m}(K)$. Załóżmy, że A jest macierzą odwracalną. Czy rzędy macierzy B i AB muszą być równe?

Rozwiązanie. Niech $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $\psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będą przekształceniami liniowymi takimi, że $M(\varphi)_{st}^{st} = A$, $M(\psi)_{st}^{st} = B$. Ponieważ φ jest izomorfizmem, mamy $\dim(V) = \dim(\varphi(V))$ dla dowolnej podprzestrzeni $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Wobec tego

$$\operatorname{rk}(AB) = \dim(\operatorname{im}(\varphi \circ \psi)) = \dim(\varphi(\operatorname{im}(\psi))) = \dim(\operatorname{im}(\psi)) = \operatorname{rk}(B).$$

(d) Czy dla każdych macierzy $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ zachodzi równość $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Rozwiązanie. Mamy

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2,$$

więc równość nie zachodzi dla macierzy takich, że $AB \neq BA$, np. dla

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ponieważ:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Czy każdy epimorfizm $\varphi : K[x] \longrightarrow K[x]$ musi być izomorfizmem?

Rozwiązanie. Nie każdy, np. przekształcenie liniowe φ dane wzorem

$$\varphi(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1$$

jest epimorfizmem, ale nie jest izomorfizmem (bo np. $\varphi(1) = 0$).

(f) Dana jest macierz $A \in M_{6\times 6}(\mathbb{R})$ o wyznaczniku $\det(A) = 7$. Załóżmy, że wszystkie współczynniki A są całkowite. Czy macierz $21A^{-1}$ też musi mieć wszystkie współczynniki całkowite?

Rozwiązanie. Wiemy, że

$$21A^{-1} = \frac{21}{\det(A)} adj(A) = 3adj(A),$$

gdzie $adj(A)$ oznacza macierz dołączoną do A. Współczynniki macierzy dołaczonej są całkowite, bo są to minory macierzy A za znakiem ± 1. Wobec tego $21A^{-1}$ ma również współczynniki całkowite.