GAL, Kolokwium 2, 20 stycznia 2020. **Temat A**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18 punktów] Przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ zadane jest wzorem

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4,\ x_1 - x_3 + x_4,\ 3x_1 + x_2 + x_4).$$

(a) Znaleźć bazę przestrzeni $\ker(\varphi)$.

(b) Wyznaczyć macierz $M(\varphi)^{\mathcal{A}}_{st}$, gdzie

$$\mathcal{A} = (\alpha_1 = (1, 1, 0),\ \alpha_2 = (0, 1, 2),\ \alpha_3 = (0, 0, 1)).$$

(c) Znaleźć, o ile to możliwe, bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ i $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ takie, że macierz $M(\varphi)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ ma dokładnie dwa niezerowe współczynniki.

Zadanie 2. [18 punktów] Dana jest baza $\mathcal{A} = (\alpha_1 = (0, 1, -2),\ \alpha_2 = (1, 1, -1),\ \alpha_3 = (0, 1, -1))$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz dla każdego $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ zadane jest macierzą

$$\mathcal{M}(\varphi_t)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 2 & t & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dla jakich t przekształcenie φ_t jest izomorfizmem?

(b) Wyznaczyć $\varphi_0(1, 2, 3)$.

(c) Niech $\psi \in (\mathbb{R}^3)^*$ będzie funkcjonałem liniowym zadanym wzorem $\psi(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) = x_1 + 2x_2 - x_3$. Znaleźć współrzędne funkcjonału $\varphi_3^*(\psi)$ w bazie sprzężonej do bazy $\mathcal{A}$.

Zadanie 3. [18 punktów] Dane są macierze $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ oraz $B, C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ postaci

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 17 \\ 13 & 11 & -7 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Obliczyć $\det(A)$.

(b) Wiadomo, że macierz B jest odwracalna. Obliczyć $\det(B^{-1}CB^TC)$.

Zadanie 4. [10 punktów] Niech V, W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K. Układ $\mathcal{A}$ jest bazą V, a układ $\mathcal{B}$ jest bazą W. Wykazać, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $\varphi : V \longrightarrow W$ zachodzi

$$M(\varphi^*)^{\mathcal{A}^*}_{\mathcal{B}^*} = \left(M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}\right)^T,$$

gdzie $\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*$ jest przekształceniem sprzężonym do φ, a $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{B}^*$ są bazami sprzężonymi do $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Zadanie 5. [18 punktów] Niech K będzie ciałem oraz niech $M_{n\times n}(K)$ będzie przestrzenią liniową macierzy kwadratowych $n \times n$ nad ciałem K.

(a) Niech $A \in M_{n\times n}(K)$ będzie niezerową macierzą. Wykazać, że istnieje osobliwa macierz $B \in M_{n\times n}(K)$ taka, że macierz $A + B$ jest nieosobliwa.

(b) Niech $T : M_{n\times n}(K) \longrightarrow M_{n\times n}(K)$ będzie przekształceniem liniowym mającym tę własność, że dla każdej $A \in M_{n\times n}(K)$ zachodzi równość $\det(A) = \det(T(A))$. Pokazać, że T jest izomorfizmem. Można zakładać, że punkt (a) jest spełniony.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL, Kolokwium 2, 20 stycznia 2020. **Temat A**

Zadanie 6. [3 punkty za każde zadanie]

(a) Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ takie, że $\mathrm{im}(\varphi) = \ker(\varphi)$?

(b) Dane jest przekształcenie liniowe $\varphi : V \longrightarrow W$ pomiędzy skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem liczb wymiernych. Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą przestrzeni V. Czy zawsze istnieje baza $\mathcal{B}$ przestrzeni W taka, że wszystkie współczynniki macierzy $\mathcal{M}(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ są całkowite?

(c) Dane są macierze $A \in M_{n\times n}(K)$ i $B \in M_{n\times m}(K)$. Załóżmy, że A jest macierzą odwracalną. Czy rzędy macierzy B i AB muszą być równe?

(d) Czy dla każdych macierzy $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ zachodzi równość $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

(e) Czy każdy epimorfizm $\varphi : K[x] \longrightarrow K[x]$ musi być izomorfizmem?

(f) Dana jest macierz $A \in M_{6\times 6}(\mathbb{R})$ o wyznaczniku $\det(A) = 7$. Załóżmy, że wszystkie współczynniki A są całkowite. Czy macierz $21A^{-1}$ też musi mieć wszystkie współczynniki całkowite?

GAL, Kolokwium 2, 20 stycznia 2020. **Temat B**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18 punktów] Przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ zadane jest wzorem

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4,\ x_1 + x_2 - x_3,\ 3x_1 + x_2 + x_4).$$

(a) Znaleźć bazę przestrzeni $\ker(\varphi)$.

(b) Wyznaczyć macierz $M(\varphi)_{st}^{\mathcal{A}}$, gdzie

$$\mathcal{A} = (\alpha_1 = (1, 0, 1),\ \alpha_2 = (0, 2, 1),\ \alpha_3 = (0, 1, 0)).$$

(c) Znaleźć, o ile to możliwe, bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ i $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ takie, że macierz $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ ma dokładnie dwa niezerowe współczynniki.

Zadanie 2. [18 punktów] Dana jest baza $\mathcal{A} = (\alpha_1 = (1, 0, -2),\ \alpha_2 = (1, 1, -1),\ \alpha_3 = (1, 0, -1))$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz dla każdego $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ zadane jest macierzą

$$\mathcal{M}(\varphi_t)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & t & -1 \\ t & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dla jakich t przekształcenie φ_t jest izomorfizmem?

(b) Wyznaczyć $\varphi_0(1, 2, 3)$.

(c) Niech $\psi \in (\mathbb{R}^3)^*$ będzie funkcjonałem liniowym zadanym wzorem $\psi(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) = x_1 + 2x_2 + x_3$. Znaleźć współrzędne funkcjonału $\varphi_3^*(\psi)$ w bazie sprzężonej do bazy $\mathcal{A}$.

Zadanie 3. [18 punktów] Dane są macierze $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ oraz $B, C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ postaci

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 13 & 11 & -7 \\ 6 & 9 & 17 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Obliczyć $\det(A)$.

(b) Wiadomo, że macierz B jest odwracalna. Obliczyć $\det(B^{-1}CBC^T)$.

Zadanie 4. [10 punktów] Niech V, W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K. Układ $\mathcal{A}$ jest bazą V, a układ $\mathcal{B}$ jest bazą W. Wykazać, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $\varphi : V \longrightarrow W$ zachodzi

$$M(\varphi^*)_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} = \left(M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T,$$

gdzie $\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*$ jest przekształceniem sprzężonym do φ, a $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{B}^*$ są bazami sprzężonymi do $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Zadanie 5. [18 punktów] Niech K będzie ciałem oraz niech $M_{n\times n}(K)$ będzie przestrzenią liniową macierzy kwadratowych $n \times n$ nad ciałem K.

(a) Niech $A \in M_{n\times n}(K)$ będzie niezerową macierzą. Wykazać, że istnieje osobliwa macierz $B \in M_{n\times n}(K)$ taka, że macierz $A + B$ jest nieosobliwa.

(b) Niech $T : M_{n\times n}(K) \longrightarrow M_{n\times n}(K)$ będzie przekształceniem liniowym mającym tę własność, że dla każdej $A \in M_{n\times n}(K)$ zachodzi równość $\det(A) = \det(T(A))$. Pokazać, że T jest izomorfizmem. Można zakładać, że punkt (a) jest spełniony.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL, Kolokwium 2, 20 stycznia 2020. **Temat B**

Zadanie 6. [3 punkty za każde zadanie]

(a) Dane jest przekształcenie liniowe $\varphi : V \longrightarrow W$ pomiędzy skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem liczb wymiernych. Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą przestrzeni V. Czy zawsze istnieje baza $\mathcal{B}$ przestrzeni W taka, że wszystkie współczynniki macierzy $\mathcal{M}(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ są całkowite?

(b) Czy każdy epimorfizm $\varphi : K[x] \longrightarrow K[x]$ musi być izomorfizmem?

(c) Dane są macierze $A \in M_{n\times n}(K)$ i $B \in M_{n\times m}(K)$. Załóżmy, że A jest macierzą odwracalną. Czy rzędy macierzy B i AB muszą być równe?

(d) Czy dla każdych macierzy $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ zachodzi równość $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

(e) Dana jest macierz $A \in M_{6\times 6}(\mathbb{R})$ o wyznaczniku $\det(A) = 7$. Załóżmy, że wszystkie współczynniki A są całkowite. Czy macierz $21A^{-1}$ też musi mieć wszystkie współczynniki całkowite?

(f) Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ takie, że $\mathrm{im}(\varphi) = \ker(\varphi)$?