GAL, Kolokwium 1, 28 listopada 2019. **Temat A**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej i nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18 punktów] Zdefiniujmy podzbiory zbioru liczb zespolonych $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2} \leqslant |z| \leqslant 2,\ \tfrac{\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant \tfrac{\pi}{2}\}, \\ A_i &= \{zz' :\ z, z' \in A_{i-1}\} \quad \text{dla } i > 0. \\ B &= A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \end{aligned}$$

(a) Naszkicować zbiory A_0, A_1, A_2.
(b) Znaleźć wszystkie pierwiastki stopnia 12 z 2^{12} należące do A_0.
(c) Znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą r taką, że $\mathbb{C} = B \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$.

Zadanie 2. [18 punktów] Niech $t \in \mathbb{R}$. Niech V_t będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + tx_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

(a) Znaleźć bazę przestrzeni V_0.
(b) Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ znaleźć wymiar przestrzeni V_t.
(c) Podać bazę pewnej podprzestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^5$ takiej, że $V_0 \oplus W = \mathbb{R}^5$.

Zadanie 3. [18 punktów] Dana jest podprzestrzeń

$$V = \operatorname{lin}\{(1,2,0,1,0), (0,1,1,1,1), (2,2,3,0,3), (1,3,1,2,1)\}$$

przestrzeni liniowej K^5.
(a) Dla $K = \mathbb{R}$ znaleźć układ równań opisujący przestrzeń V.
(b) Dla $K = \mathbb{R}$ znaleźć wymiar przestrzeni $V \cap \operatorname{lin}\{(3,1,2,-1,2), (1,1,1,1,1)\}$.
(c) Dla $K = \mathbb{F}_5$ znaleźć bazę V.

Zadanie 4. [10 punktów] Niech $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ będzie układem wektorów przestrzeni liniowej V. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:
(a) $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest bazą przestrzeni V,
(b) $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,
(c) $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Zadanie 5. [18 punktów] Niech $I_n \in M_{n\times n}(\mathbb{Q})$ będzie macierzą, której jedyne niezerowe wyrazy znajdują się na przekątnej i są równe 1. Zbiór $\mathcal{P}_n$ zawiera wszystkie macierze powstałe z I_n przez wykonanie dowolnie wielu operacji elementarnych zamiany wierszy (w tym I_n). Niech $V = \operatorname{lin}(\mathcal{P}_n)$. Wykazać, że:

(a) jeśli $A \in V$, to suma wyrazów w każdym wierszu i w każdej kolumnie macierzy A jest taka sama,

(b) jeśli W_0 jest podprzestrzenią $M_{n\times n}(\mathbb{Q})$ złożoną z macierzy o zerowej sumie wyrazów w każdym wierszu i w każdej kolumnie oraz jeśli $F_{ij} \in W_0$ jest taką macierzą, która na pozycjach $(i,j), (n,n)$ ma 1, na pozycjach $(i,n), (n,j)$ ma -1 oraz na pozostałych pozycjach ma 0, to $W_0 = \operatorname{lin}(F_{ij}, 1 \leqslant i,j \leqslant n-1)$,

(c) jeśli macierz $R_{(i,j,n)}$ powstaje z I_n przez dwie kolejno wykonane operacje elementarne: zamianę wiersza i-tego z n-tym, a następnie zamianę wiersza j-tego z n-tym, dla $1 \leqslant i,j < n$, $i \neq j$, oraz jeśli macierz $S_{(k,n)}$ powstaje z I_n przez zamianę k-tego i n-tego wiersza, dla $1 \leqslant k < n$, to układ macierzy:

$$\{R_{(i,j,n)}, 1 \leqslant i,j \leqslant n-1, i \neq j\} \cup \{S_{(k,n)}, 1 \leqslant k \leqslant n-1\} \cup \{I_n\}$$

jest bazą V. W szczególności $\dim(V) = (n-1)^2 + 1$.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa i nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL, Kolokwium 1, 28 listopada 2019. **Temat A**

Zadanie 6. [3 punkty za każde zadanie]

(a) W przestrzeni $\mathbb{R}^{11}$ dane są podprzestrzenie V, W, przy czym $\dim(V) = 6$ oraz $\dim(W) = 8$. Czy przestrzeń $V \cap W$ może mieć wymiar 5?

(b) Czy istnieje wielomian $w(x)$ stopnia 20 o współczynnikach w ciele $\mathbb{F}_{23}$ taki, że $w(a) = 0$ dla wszystkich $a \in \mathbb{F}_{23}$?

(c) Macierz $A \in M_{4x3}(K)$ jest macierzą współczynników jednorodnego układu równań, mającego więcej niż jedno rozwiązanie. Jaki jest największy możliwy rząd macierzy A?

(d) Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową, $W \subseteq V$ podprzestrzenią liniową, a $\alpha \in V \setminus W$ wektorem takim, że $V = W + \mathrm{lin}(\alpha)$. Czy dla każdej bazy $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ przestrzeni W układ $(\beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha)$ jest bazą V?

(e) Dane są podprzestrzenie liniowe $V \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^6$, przy czym $\dim(V) = 5$ oraz $W \neq \mathbb{R}^6$. Czy wynika z tego, że $V = W$?

(f) Dany jest liniowo zależny układ wektorów $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ w przestrzeni liniowej V. Czy każdy z wektorów α_i tego układu można zapisać jako kombinację liniową pozostałych, tj. wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_n$?

GAL, Kolokwium 1, 28 listopada 2019. **Temat B**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej i nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18 punktów] Zdefiniujmy podzbiory zbioru liczb zespolonych $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2} \leqslant |z| \leqslant 2,\ \tfrac{\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant \tfrac{\pi}{2}\}, \\ A_i &= \{zz' :\ z, z' \in A_{i-1}\} \quad \text{dla } i > 0. \\ B &= A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \end{aligned}$$

(a) Naszkicować zbiory A_0, A_1, A_2.
(b) Znaleźć wszystkie pierwiastki stopnia 12 z 2^{12} należące do A_0.
(c) Znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą r taką, że $\mathbb{C} = B \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$.

Zadanie 2. [18 punktów] Niech $t \in \mathbb{R}$. Niech V_t będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + tx_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

(a) Znaleźć bazę przestrzeni V_0.
(b) Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ znaleźć wymiar przestrzeni V_t.
(c) Podać bazę pewnej podprzestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^5$ takiej, że $V_0 \oplus W = \mathbb{R}^5$.

Zadanie 3. [18 punktów] Dana jest podprzestrzeń

$$V = \mathrm{lin}\{(1, 2, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 3, 1, 1, 2), (2, 2, 3, 3, 0)\}$$

przestrzeni liniowej K^5.
(a) Dla $K = \mathbb{R}$ znaleźć układ równań opisujący przestrzeń V.
(b) Dla $K = \mathbb{R}$ znaleźć wymiar przestrzeni $V \cap \mathrm{lin}\{(2, 0, 1, 1, -2), (1, 1, 1, 1, 1)\}$.
(c) Dla $K = \mathbb{F}_5$ znaleźć bazę V.

Zadanie 4. [10 punktów] Niech $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ będzie układem wektorów przestrzeni liniowej V. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:
(a) $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest bazą przestrzeni V,
(b) $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V,
(c) $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

Zadanie 5. [18 punktów] Niech $I_n \in M_{n\times n}(\mathbb{Q})$ będzie macierzą, której jedyne niezerowe wyrazy znajdują się na przekątnej i są równe 1. Zbiór $\mathcal{P}_n$ zawiera wszystkie macierze powstałe z I_n przez wykonanie dowolnie wielu operacji elementarnych zamiany wierszy (w tym I_n). Niech $V = \mathrm{lin}(\mathcal{P}_n)$. Wykazać, że:

(a) jeśli $A \in V$, to suma wyrazów w każdym wierszu i w każdej kolumnie macierzy A jest taka sama,

(b) jeśli W_0 jest podprzestrzenią $M_{n\times n}(\mathbb{Q})$ złożoną z macierzy o zerowej sumie wyrazów w każdym wierszu i w każdej kolumnie oraz jeśli $F_{ij} \in W_0$ jest taką macierzą, która na pozycjach $(i, j), (n, n)$ ma 1, na pozycjach $(i, n), (n, j)$ ma -1 oraz na pozostałych pozycjach ma 0, to $W_0 = \mathrm{lin}(F_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n - 1)$,

(c) jeśli macierz $R_{(i,j,n)}$ powstaje z I_n przez dwie kolejno wykonane operacje elementarne: zamianę wiersza i-tego z n-tym, a następnie zamianę wiersza j-tego z n-tym, dla $1 \leqslant i, j < n$, $i \neq j$, oraz jeśli macierz $S_{(k,n)}$ powstaje z I_n przez zamianę k-tego i n-tego wiersza, dla $1 \leqslant k < n$, to układ macierzy:

$$\{R_{(i,j,n)}, 1 \leqslant i, j \leqslant n - 1, i \neq j\} \cup \{S_{(k,n)}, 1 \leqslant k \leqslant n - 1\} \cup \{I_n\}$$

jest bazą V. W szczególności $\dim(V) = (n - 1)^2 + 1$.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa i nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL, Kolokwium 1, 28 listopada 2019. **Temat B**

Zadanie 6. [3 punkty za każde zadanie]

(a) Dane są podprzestrzenie liniowe $V \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^6$, przy czym $\dim(V) = 5$ oraz $W \neq \mathbb{R}^6$. Czy wynika z tego, że $V = W$?

(b) Czy istnieje wielomian $w(x)$ stopnia 20 o współczynnikach w ciele $\mathbb{F}_{23}$ taki, że $w(a) = 0$ dla wszystkich $a \in \mathbb{F}_{23}$?

(c) Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową, $W \subseteq V$ podprzestrzenią liniową, a $\alpha \in V \setminus W$ wektorem takim, że $V = W + \mathrm{lin}(\alpha)$. Czy dla każdej bazy $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ przestrzeni W układ $(\beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha)$ jest bazą V?

(d) Macierz $A \in M_{4\times 3}(K)$ jest macierzą współczynników jednorodnego układu równań, mającego więcej niż jedno rozwiązanie. Jaki jest największy możliwy rząd macierzy A?

(e) Dany jest liniowo zależny układ wektorów $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ w przestrzeni liniowej V. Czy każdy z wektorów α_i tego układu można zapisać jako kombinację liniową pozostałych, tj. wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_n$?

(f) W przestrzeni $\mathbb{R}^{11}$ dane są podprzestrzenie V, W, przy czym $\dim(V) = 6$ oraz $\dim(W) = 8$. Czy przestrzeń $V \cap W$ może mieć wymiar 5?