GAL 1, Kolokwium 2, **Temat A**

21 stycznia 2019

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

UWAGA !!! Zadania znajdują się na obu stronach tej kartki.

Zadanie 1. [18 punktów (6+6+6)]
Dla $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $\varphi_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem

$$\varphi_t(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + tx_3,\ x_1 - x_2 - x_4,\ tx_2 + tx_3 + (t-1)x_4).$$

(a) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie φ_t jest epimorfizmem?

(b) Znaleźć bazę $\ker(\varphi_2)$.

(c) Znaleźć wymiar przestrzeni $\ker(\varphi_0) \cap \ker(\varphi_1)$.

Zadanie 2. [18 punktów (6+6+6)]
Dane są: baza $\mathcal{A} = ((0,1,0),(1,0,1),(1,2,0))$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, baza $\mathcal{B} = ((-1,1),(-1,2))$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_3),$$

oraz przekształcenie liniowe $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Obliczyć macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

(b) Obliczyć $\psi(1,0,0)$.

(c) Znaleźć bazę $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ taką, że macierz $M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$ jest górno-trójkątna, tzn. taka, że wszystkie elementy pod główną przekątną są zerami.

Zadanie 3. [10 punktów]
Niech V, W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że $\dim(V) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{im}(\varphi))$.

Zadanie 4. [18 punktów (12+6)]
Dla $t \in \mathbb{C}$ oraz $n \geqslant 2$ dana jest macierz $A_t^n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$,

$$A_t^n = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & t & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t & 4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \end{bmatrix}.$$

(a) Dla każdego $n \geqslant 2$ obliczyć wyznacznik macierzy A_0^n.

(b) Wykazać, że istnieje $t \in \mathbb{R}$ takie, że $\det(A_t^5) = 0$.

Zadanie 5. [18 punktów (3+15)]
Dane są przestrzenie liniowe V, W nad ciałem K, $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ oraz przekształcenie liniowe $\varphi : V \to V$. Definiujemy funkcję $\Phi : L(V,W) \to L(V,W)$ wzorem

$$\Phi(\psi) = \psi \circ \varphi.$$

(a) Wykazać, że Φ jest przekształceniem liniowym.

(b) Wyrazić wyznacznik przekształcenia Φ za pomocą m, n oraz $\det(\varphi)$.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL 1, Kolokwium 2, **Temat A**

21 stycznia 2018

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

UWAGA !!! Pytania znajdują się na obu stronach tej kartki.

Zadanie 6. [3 punkty za każde zadanie]

(a) Załóżmy, że macierz $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest odwracalna. Czy macierz $B = (b_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ taka, że $b_{ij} = j^2 a_{ij}$ musi być odwracalna?

(b) Dana jest baza $\mathcal{B} = (\beta_1 = (1,2,3), \beta_2 = (2,3,4), \beta_3 = (1,0,1))$. Obliczyć współrzędne funkcjonału $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$,

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + x_3$$

w bazie sprzężonej do $\mathcal{B}$.

(c) Dane są przekształcenia liniowe $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$. Czy musi istnieć niezerowy wektor $\alpha \in \mathbb{R}^5$ taki, że $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$?

(d) Czy istnieją macierze $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ i $B \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ takie, że $\det(AB) = 1$?

(e) Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Czy dla każdego przekształcenia liniowego $\varphi : V^* \to W^*$ istnieje przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$ takie, że $\psi^* = \varphi$?

(f) Dane jest niezerowe przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Czy złożenie $\varphi \circ \varphi$ też musi być niezerowe?

GAL 1, Kolokwium 2, **Temat B**

21 stycznia 2019

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

UWAGA !!! Zadania znajdują się na obu stronach tej kartki.

Zadanie 1. [18 punktów (6+6+6)]
Dla $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $\varphi_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem

$$\varphi_t(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + tx_4,\ x_1 - x_2 + x_3,\ tx_2 + (1-t)x_3 + tx_4).$$

(a) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie φ_t jest epimorfizmem?

(b) Znaleźć bazę $\ker(\varphi_2)$.

(c) Znaleźć wymiar przestrzeni $\ker(\varphi_0) \cap \ker(\varphi_1)$.

Zadanie 2. [18 punktów (6+6+6)]
Dane są: baza $\mathcal{A} = ((0,1,0),(1,0,1),(1,2,0))$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, baza $\mathcal{B} = ((1,-1),(2,-1))$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_3),$$

oraz przekształcenie liniowe $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Obliczyć macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

(b) Obliczyć $\psi(-1,0,0)$.

(c) Znaleźć bazę $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ taką, że macierz $M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$ jest górno-trójkątna, tzn. taka, że wszystkie elementy pod główną przekątną są zerami.

Zadanie 3. [10 punktów]
Niech V, W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że $\dim(V) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{im}(\varphi))$.

Zadanie 4. [18 punktów (12+6)]
Dla $t \in \mathbb{C}$ oraz $n \geqslant 2$ dana jest macierz $A_t^n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$,

$$A_t^n = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & t & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & t \end{bmatrix}.$$

(a) Dla każdego $n \geqslant 2$ obliczyć wyznacznik macierzy A_0^n.

(b) Wykazać, że istnieje $t \in \mathbb{R}$ takie, że $\det(A_t^5) = 0$.

Zadanie 5. [18 punktów (3+15)]
Dane są przestrzenie liniowe V, W nad ciałem K, $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ oraz przekształcenie liniowe $\varphi : V \to V$. Definiujemy funkcję $\Phi : L(V,W) \to L(V,W)$ wzorem

$$\Phi(\psi) = \psi \circ \varphi.$$

(a) Wykazać, że Φ jest przekształceniem liniowym.

(b) Wyrazić wyznacznik przekształcenia Φ za pomocą m, n oraz $\det(\varphi)$.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL 1, Kolokwium 2, **Temat B**

21 stycznia 2018

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

UWAGA !!! Pytania znajdują się na obu stronach tej kartki.

Zadanie 6. [3 punkty za każde zadanie]

(a) Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Czy dla każdego przekształcenia liniowego $\varphi : V^* \to W^*$ istnieje przekształcenie liniowe $\psi : W \to V$ takie, że $\psi^* = \varphi$?

(b) Załóżmy, że macierz $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest odwracalna. Czy macierz $B = (b_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ taka, że $b_{ij} = j^2 a_{ij}$ musi być odwracalna?

(c) Dane są przekształcenia liniowe $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$. Czy musi istnieć niezerowy wektor $\alpha \in \mathbb{R}^5$ taki, że $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$?

(d) Dane jest niezerowe przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Czy złożenie $\varphi \circ \varphi$ też musi być niezerowe?

(e) Czy istnieją macierze $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ i $B \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ takie, że $\det(AB) = 1$?

(f) Dana jest baza $\mathcal{B} = (\beta_1 = (1, 2, 3), \beta_2 = (2, 3, 4), \beta_3 = (1, 0, 1))$. Obliczyć współrzędne funkcjonału $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$,

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + x_3$$

w bazie sprzężonej do $\mathcal{B}$.