GAL 1, Kolokwium 1, **Temat A**

26 listopada 2018

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18 punktów] Niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją daną wzorem $f(z) = iz+1$. Niech $A_0, A_1, A_2, \ldots$ będą podzbiorami $\mathbb{C}$ zdefiniowanymi indukcyjnie: $A_0 = \mathbb{R}$ oraz $A_i = f(A_{i-1})$ dla $i > 0$.

(a) Znaleźć wszystkie punkty $z \in \mathbb{C}$ takie, że $f(z) = z$.

(b) Naszkicować zbiory A_1, A_2, A_3 i A_4.

(c) Uzasadnić, że $A_3 \cap A_{33} = \emptyset$.

Zadanie 2. [18 punktów] Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ niech V_t będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + (2-t)x_4 = 0 \\ tx_1 + tx_2 + tx_3 + tx_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Znaleźć bazę przestrzeni V_2.

(b) Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ znaleźć wymiar przestrzeni V_t.

(c) Znaleźć wymiar przestrzeni $V_0 + V_1 + V_2$.

Zadanie 3. [18 punktów] Dane są podprzestrzenie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^4$:

$$V = \text{lin}\{(1,1,2,3), (1,0,1,1), (4,1,5,6), (2,3,5,8)\} \subseteq \mathbb{R}^4$$
$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

(a) Znaleźć układ równań liniowych opisujący przestrzeń V.

(b) Wskazać podprzestrzeń $W' \subseteq W$ taką, że $V \oplus W' = \mathbb{R}^4$ i znaleźć jej bazę.

Zadanie 4. [10 punktów] Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, a $W_1, W_2 \subseteq V$ jej podprzestrzeniami liniowymi. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

(a) Każdy wektor $\alpha \in V$ można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy $\alpha = \beta_1 + \beta_2$, gdzie $\beta_1 \in W_1$, $\beta_2 \in W_2$.

(b) $W_1 + W_2 = V$ oraz $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Zadanie 5. [18 punktów] Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru $n > 0$ nad nieskończonym ciałem K. Pokazać, że dla każdej liczby k takiej, że $0 \leqslant k \leqslant n+1$ istnieje zbiór $A = \{a_1, ..., a_{n+1}\}$ wektorów przestrzeni V taki, że dokładnie k różnych podzbiorów A tworzy bazy V.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL 1, Kolokwium 1, **Temat A**

26 listopada 2018

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

UWAGA !!! Pytania znajdują się na obu stronach tej kartki.

Zadanie 6. [3 punkty $\times$ 6] Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania.

1. Niech $w(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach w ciele $\mathbb{Z}_3$. Załóżmy, że $w(a) = 0$ dla wszystkich $a \in \mathbb{Z}_3$. Czy wynika z tego, że $w(x) = 0$?

2. Niech $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ będzie przeliczalnym układem wektorów w przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Załóżmy, że $\dim \operatorname{lin}\{\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}\} = 2$ dla każdego $i \geqslant 1$. Czy możliwe jest, aby przestrzeń $\operatorname{lin}(A)$ była nieskończenie wymiarowa?

3. Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami liniowymi wymiaru 5 przestrzeni $\mathbb{R}^8$. Czy możliwe jest, aby $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$?

4. Dany jest układ liniowy jednorodny składajacy sie z jedenastu równań o pięciu niewiadomych. Jaki może być wymiar przestrzeni rozwiązań tego układu?

5. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Czy prawdą jest, że A jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b_1 = \ldots = b_m = 0$?

6. Czy istnieje wieloman $w(x) \in \mathbb{R}[x]$ stopnia 9, który posiada dokładnie 5 różnych nierzeczywistych pierwiastków zespolonych?

GAL 1, Kolokwium 1, **Temat B**

26 listopada 2018

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18 punktów] Niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją daną wzorem $f(z) = iz-1$. Niech $A_0, A_1, A_2, \ldots$ będą podzbiorami $\mathbb{C}$ zdefiniowanymi indukcyjnie: $A_0 = \mathbb{R}$ oraz $A_i = f(A_{i-1})$ dla $i > 0$.

(a) Znaleźć wszystkie punkty $z \in \mathbb{C}$ takie, że $f(z) = z$.

(b) Naszkicować zbiory A_1, A_2, A_3 i A_4.

(c) Uzasadnić, że $A_1 \cap A_{11} = \emptyset$.

Zadanie 2. [18 punktów] Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ niech V_t będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 & & & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & (2-t)x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ tx_1 & + & tx_2 & + & tx_3 & + & tx_4 & = & 0 \end{cases}$$

(a) Znaleźć bazę przestrzeni V_2.

(b) Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ znaleźć wymiar przestrzeni V_t.

(c) Znaleźć wymiar przestrzeni $V_0 + V_1 + V_2$.

Zadanie 3. [18 punktów] Dane są podprzestrzenie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^4$:

$$V = \mathrm{lin}\{(1,1,3,2),(1,0,1,1),(4,1,6,5),(2,3,8,5)\} \subseteq \mathbb{R}^4$$
$$W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

(a) Znaleźć układ równań liniowych opisujący przestrzeń V.

(b) Wskazać podprzestrzeń $W' \subseteq W$ taką, że $V \oplus W' = \mathbb{R}^4$ i znaleźć jej bazę.

Zadanie 4. [10 punktów] Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, a $W_1, W_2 \subseteq V$ jej podprzestrzeniami liniowymi. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

(a) Każdy wektor $\alpha \in V$ można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy $\alpha = \beta_1 + \beta_2$, gdzie $\beta_1 \in W_1$, $\beta_2 \in W_2$.

(b) $W_1 + W_2 = V$ oraz $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Zadanie 5. [18 punktów] Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru $n > 0$ nad nieskończonym ciałem K. Pokazać, że dla każdej liczby k takiej, że $0 \leqslant k \leqslant n+1$ istnieje zbiór $A = \{a_1, ..., a_{n+1}\}$ wektorów przestrzeni V taki, że dokładnie k różnych podzbiorów A tworzy bazy V.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL 1, Kolokwium 1, **Temat B**

26 listopada 2018

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

UWAGA !!! Pytania znajdują się na obu stronach tej kartki.

Zadanie 6. [3 punkty $\times$ 6] Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania:

1. Dany jest układ liniowy jednorodny składajacy sie z dziesięciu równań o sześciu niewiadomych. Jaki może być wymiar przestrzeni rozwiązań tego układu?

2. Niech $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ będzie przeliczalnym układem wektorów w przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Załóżmy, że $\dim \operatorname{lin}\{\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}\} = 2$ dla każdego $i \geqslant 1$. Czy możliwe jest, aby przestrzeń $\operatorname{lin}(A)$ była nieskończenie wymiarowa?

3. Czy istnieje wieloman $w(x) \in \mathbb{R}[x]$ stopnia 11, który posiada dokładnie 7 różnych nierzeczywistych pierwiastków zespolonych?

4. Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami liniowymi wymiaru 4 przestrzeni $\mathbb{R}^6$. Czy możliwe jest, aby $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$?

5. Niech $w(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach w ciele $\mathbb{Z}_3$. Załóżmy, że $w(a) = 0$ dla wszystkich $a \in \mathbb{Z}_3$. Czy wynika z tego, że $w(x) = 0$?

6. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Czy prawdą jest, że A jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b_1 = \ldots = b_m = 0$?