GAL Kolokwium 2, 31 stycznia 2018, **Temat A**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18pt]
Niech $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

(a) Znaleźć wzór na takie przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, że

$$\ker(\varphi) = W \quad \text{oraz} \quad \varphi((1,0,1)) = (1,0,-1)\,.$$

(b) Podać wzór przekształcenia $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będącego rzutem na W wzdłuż $lin\{(1,1,1)\}$.

Zadanie 2. [18 pt]
a) Obliczyć wyznacznik macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 5 & t & 1 \\ 1 & 2 & t & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

W zalżności od parametru $t \in \mathbb{R}$.

b) Obliczyć wyznacznik macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 128 & 0 \end{pmatrix}$$

Zadanie z teorii 3. [10 pt]
a) Podać definicję macierzy przekształcenia liniowego w zadanych bazach.

b) Sformułować twierdzenie Laplace'a o rozwijaniu wyznaczników względem wierszy i kolumn.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL Kolokwium 2, 31 stycznia 2018, **Temat A**

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań z zadania 5. Rozwiązanie każdego z pozostałych zadań TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach.

Zadanie 4. [18 pt] Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że jego macierz w bazie standardowej jest równa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Znaleźć obraz funkcjonału $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ przy przekształceniu sprzężonym φ^*.
b)Znaleźć bazę jądra przekształcenia φ^*.

Zadanie 5. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6×3 pt]:

1. Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : (\mathbb{Z}_3)^3 \to (\mathbb{Z}_3)^4$ takie, że jądro ma 3 elementy, a obraz 9 elementów?

2. Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : V \to V$ takie, że φ jest nie jest izomorfizmem, ale $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$ jest izomorfizmem.

3. Niech A będzie macierzą rozmiaru 3×3 nad ciałem liczb rzeczywistych. Wiadomo, że $A = -A^T$. Obliczyć $\det(A)$.

Zadanie 5 (c.d.)

4. Dane przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$. Załóżmy, że $\det(M(\varphi)_{st}^{st} - I) = 0$. Czy istnieje niezerowy wektor v, dla którego $\phi(v) = v$?

5. Czy jest prawdą, że macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ o zerowym wyznaczniku $\det(A) = 0$ jest iloczynem macierzy elementarnych?

6. Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi. Czy przekształcenie liniowe $\psi^*\varphi^*$ będące ich złożeniem przekształceń sprzężonych może być monomorfizmem?

Zadanie 6. [18 pt]

a) Przypuśćmy, że V jest sumą prostą swoich podprzestrzeni liniowych W_1 i W_2. Niech $\pi_i : V \to W_i$ (dla $i = 1, 2$) będą rzutami w sumie prostej. Wykazać, że dla dowolych przekształaceń liniowych $\varphi_1 : Z \to W_1$ i $\varphi_2 : Z \to W_2$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie $\varphi : Z \to V$ takie, że $\varphi_1 = \pi_1 \circ \varphi$ i $\varphi_2 = \pi_2 \circ \varphi$.

b) Dane dwie podprzestrzenie liniowe W_1 i W_2 w V oraz epimorfizmy $\pi_i : V \to W_i$ (dla $i = 1, 2$). Załóżmy, że zachodzi następująca własność: *dla dowolnej przestrzeni liniowej Z i dla dowolych przekształaceń liniowych $\varphi_1 : Z \to W_1$ i $\varphi_2 : Z \to W_2$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie $\varphi : Z \to V$ takie, że $\varphi_1 = \pi_1 \circ \varphi$ i $\varphi_2 = \pi_2 \circ \varphi$.* Udowodnić, że $V = \ker(\varphi_1) \oplus \ker(\varphi_1)$.