GAL Kolokwium 2, 25 stycznia, **Temat A**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [16pt]

Niech $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym mającym w bazach $\mathcal{A} = \{(-1,0,1),(0,1,0),(1,0,1)\}$ i $\mathcal{B} = \{(1,0,1,0),(0,0,0,1),(0,1,0,0),(1,0,-1,0)\}$ macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = X$.

(a) Znaleźć wzór na ϕ.

(b) Czy istnieje baza $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ taka, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = Y$. Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy.

Zadanie 2. [16pt]

Niech $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ będzie funkcjonałem, zadanym wzorem $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 - 3x_2 + x_3$.

a) Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$, oraz $\mathcal{A}^* = \{g_1,g_2,g_3\} \subset (\mathbb{R}^3)^*$ bazą sprzężoną. Przypuśćmy, że $g_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 - x_3$, $g_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 - 2x_2$. Zakładając, że trzecia współrzędna funkcjonału f w bazie sprzężonej jest równa 1 znaleźć wektor α_3.

b) Niech $\mathcal{B} = \{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ będzie inną bazą $\mathbb{R}^3$. Przypuśćmy, że $\beta_1 = (1,2,1)$, $\beta_2 = (2,1,1)$, a wektora β_3 nie znamy. Które ze współrzędnych funkcjonału f w bazie sprzężonej do $\mathcal{B}$ są jednoznacznie wyznaczone. Jakie wartości mogą przyjmować pozostałe współrzędne przy różnych wyborach β_3.

Zadanie 3. [18pt]

a) Niech

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ t & t & t & t \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierz B jest odwracalna. Obliczyć wyznacznik macierzy $C = BAB^{-1}$ w zależności od t, zakładając, że B jest odwracalne.

b) Przypuśćmy, że macierz $X \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ spełnia równanie macierzowe

$$X - 4X^{-1} = 0\,.$$

Obliczyć $|\det(X)|$.

c) Obliczyć wyznacznik macierzy $n \times n$ postaci

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & 5 & \dots & 3 \end{pmatrix}.$$

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL Kolokwium 2, 25 stycznia 2018, **Temat A**

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań z zadania 4. Rozwiązanie każdego z pozostałych zadań TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach.

Zadanie 4. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6 × 3 pt]:

1. Czy istnieją przekształcenia liniowe $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ takie, że $f \circ g = id_{\mathbb{R}^3}$?

2. Niech $n \geqslant 2$. Czy istnieje taka macierz $0 \neq A \in M_{n\times n}(K)$ rzędu $r(A) \leqslant n-1$, że $A^2 = A$?

3. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi wymiarów skończonych i $\phi : V \to W$ niech będzie takim przekształceniem liniowym, że $\dim \mathrm{im}\phi = \dim V$. Czy ϕ jest monomorfizmem?

4. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi wymiaru skończonego i $\phi : V \to W$ niech będzie przekształceniem liniowym. Czy jest prawdą, że $\dim \ker \phi = \dim \ker \phi^\star$, gdzie $\phi^\star : W^\star \to V^\star$ jest przekształceniem sprzężonym?

5. Przypuśćmy, że A jest macierzą kwadratową taką, że suma kolumn jest równa wektorowi zerowemu. Czy $\det(A) = 0$?

6. Każdy wyraz macierzy $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{R})$ jest liczbą całkowitą parzystą. Czy wyznacznik $\det A$ macierzy A może być liczbą nieparzystą ?

Zadanie 5. [16pt]
Dla macierzy kwadratowej $B = [b_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ niech $\mathrm{tr}(B) = \sum_{i=1}^n b_{ii}$ oznacza sumę elementów na przekątnej macierzy B. Ponadto dla macierzy kwadratowej $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ i niech $f_A : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ będzie funkcją określoną wzorem $f_A(X) = \mathrm{tr}(AX)$ dla każdej $X \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(a) Pokazać, że dla każdej macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ funkcja f_A jest funkcjonałem liniowym.

(b) Pokazać, że dla każdego funkcjonału liniowego $f \in (M_{n\times n}(\mathbb{K}))^\star$ istnieje dokładnie jedna macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ taka, że $f = f_A$.

Zadanie 6 (z teorii). [16pt]

Podać dowód twierdzenia Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy.

GAL Kolokwium 2, 25 stycznia 2018, **Temat B**

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
• Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [16pt]

Niech $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym mającym w bazach $\mathcal{A} = \{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,1)\}$ i $\mathcal{B} = \{(1,0,-1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1),(1,0,1,0)\}$ macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = X$.

(a) Znaleźć wzór na ϕ.

(b) Czy istnieje baza $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ taka, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = Y$. Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy.

Zadanie 2. [16pt]

Niech $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ będzie funkcjonałem, zadanym wzorem $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - 2x_2 - x_3$.

a) Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$, oraz $\mathcal{A}^* = \{g_1, g_2, g_3\} \subset (\mathbb{R}^3)^*$ bazą sprzężoną. Przypuśćmy, że $g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_3$, $g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2$. Zakładając, że trzecia współrzędna funkcjonału f w bazie sprzężonej jest równa 1 znaleźć wektor α_3.

b) Niech $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ będzie inną bazą $\mathbb{R}^3$. Przypuśćmy, że $\beta_1 = (3,3,1)$, $\beta_2 = (2,1,1)$, a wektora β_3 nie znamy. Które ze współrzędnych funkcjonału f w bazie sprzężonej do $\mathcal{B}$ są jednoznacznie wyznaczone. Jakie wartości mogą przyjmować pozostałe współrzędne przy różnych wyborach β_3.

Zadanie 3. [18pt]

a) Niech

$$A = \begin{pmatrix} t & t & t & t \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & t & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierz B jest odwracalna. Obliczyć wyznacznik macierzy $C = BAB^{-1}$ w zależności od t, zakładając, że B jest odwracalne.

b) Przypuśćmy, że macierz $X \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ spełnia równanie macierzowe

$$X - 4X^{-1} = 0\,.$$

Obliczyć $|\det(X)|$.

c) Obliczyć wyznacznik macierzy $n \times n$ postaci

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 7 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 7 \end{pmatrix}.$$

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL Kolokwium 2, 25 stycznia 2018, **Temat B**

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań z zadania 4. Rozwiązanie każdego z pozostałych zadań TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach.

Zadanie 4. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6 × 3 pt]:

1. Czy istnieją przekształcenia liniowe $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ takie, że $f \circ g = id_{\mathbb{R}^3}$?

2. Niech $n \geqslant 2$. Czy istnieje taka macierz $0 \neq A \in M_{n\times n}(K)$ rzędu $r(A) \leqslant n-1$, że $A^2 = A$?

3. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi wymiarów skończonych i $\phi : V \to W$ niech będzie takim przekształceniem liniowym, że $\dim \mathrm{im}\phi = \dim V$. Czy ϕ jest monomorfizmem?

4. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi wymiaru skończonego i $\phi : V \to W$ niech będzie przekształceniem liniowym. Czy jest prawdą, że $\dim\ker\phi = \dim\ker\phi^\star$, gdzie $\phi^\star : W^\star \to V^\star$ jest przekształceniem sprzężonym?

5. Przypuśćmy, że A jest macierzą kwadratową taką, że suma kolumn jest równa wektorowi zerowemu. Czy $\det(A) = 0$?

6. Każdy wyraz macierzy $A \in M_{5\times5}(\mathbb{R})$ jest liczbą całkowitą parzystą. Czy wyznacznik $\det A$ macierzy A może być liczbą nieparzystą ?

Zadanie 5. [16pt]
Dla macierzy kwadratowej $B = [b_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ niech $\mathrm{tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ oznacza sumę elementów na przekątnej macierzy B. Ponadto dla macierzy kwadratowej $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ i niech $f_A : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ będzie funkcją określoną wzorem $f_A(X) = \mathrm{tr}(AX)$ dla każdej $X \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(a) Pokazać, że dla każdej macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ funkcja f_A jest funkcjonałem liniowym.

(b) Pokazać, że dla każdego funkcjonału liniowego $f \in (M_{n\times n}(\mathbb{K}))^\star$ istnieje dokładnie jedna macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ taka, że $f = f_A$.

Zadanie 6 (z teorii). [16pt]

Podać dowód twierdzenia Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy.