Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL Kolokwium 1, 30 listopada 2017, **Temat A**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18pt]

a) Niech $z = \sqrt{3} + i$. Dla jakiej liczby naturalniej $n \in [10, 20]$ mamy $\mathrm{Re}(z^n) > 0$?

b) Znaleźć wszystkie liczby $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ spełniające równanie

$$\frac{8|z|}{z} = \frac{1}{2}\overline{z}\, z^3 \,.$$

Zadanie 2. [18pt]

Niech $V_1 = \mathrm{lin}\{(1,1,1,2),(2,0,1,3),(0,2,1,1)\}$ oraz V_2 opisane układem równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + tx_4 = 0 \end{cases}$$

będą podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^4$.

(a) Znaleźć wszystkie takie $t \in \mathbb{R}$, że $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$.

(b) Znaleźć bazę przestrzeni $V_1 + V_2$ w zależności od $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6×3 pt]:

1. Liczba zespolona $1 + 2i$ jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$ stopnia 8 o wyrazach rzeczywistych. Czy wszystkie pozostałe pierwiastki mogą być rzeczywiste?

2. Czy wektory $\alpha = (0,1,1)$, $\beta = (1,0,1)$, $\gamma = (1,1,0) \in (\mathbb{Z}_2)^3$ są liniowo zależne?

3. Czy jest prawdą, że istnieje taka baza $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n, \alpha_4$ przestrzeni liniowej $\mathbb{K}^4$, że $a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_{i4} = 0$ dla każdego $i = 1, 2, 3, 4$, gdzie $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})$ dla $i = 1, 2, 3, 4$?

4. Macierze $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$. Czy jest prawdą, że $r(A_i) = 3$ dla każdego i ?

5. Załóżmy, że macierz B powstała poprzez skreślenie pewnej liczby wierszy i kolumn macierzy A. Czy rząd macierzy B może być większy od rzędu macierzy A?

6. Czy istnieją takie podprzestrzenie V_1 i V_2 przestrzeni $\mathbb{R}^7$, że $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$ oraz $\dim V_1 = \dim V_2 = 5$?

GAL Kolokwium 1, część 2, 30 listopada 2017, **Temat A**

Zadanie 4. [18pt]

Niech $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 + 2x_3, x_3 + 3x_4)$.

a) Znaleźć podprzestrzeń liniową $U \subset \mathbb{R}^4$ taką, że $\mathbb{R}^4 = \ker(f) \bigoplus U$.

b) Czy istnieje przekształcenie liniowe $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$\ker(g) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0\,,\ x_1 - x_3 - x_4 = 0\,\}$$

oraz wektor $(1, 2, 1)$ należy do obrazu g. Jeśli istnieje takie przekształcenie, to podać jego wzór.

Zadanie 5. [18pt]

Dane są macierze rozmiaru $m \times n$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Niech $V \subset \mathbb{K}^n$ będzie przestrzenią rozwiązań układu jednorodnego zadanego przez macierz A

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0\,, \quad i = 1, 2, \dots, m\,,$$

a $W \subset \mathbb{K}^n$ niech będzie przestrzenią rozwiązań układu jednorodnego zadanego przez macierz B

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = 0\,, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Definiujemy macierze $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ rozmiaru $2m \times n$ oraz (A, B) rozmiaru $m \times 2n$.

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (A, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

a) Czy znając $\dim V$, $\dim W$, $\dim(V + W)$ można wyznaczyć rząd macierzy $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$?

b) Czy znając $\dim V$, $\dim W$, $\dim(V + W)$ można wyznaczyć rząd macierzy (A, B)?

c) Niech $a = r(A)$ i $b = r(B)$ będą rzędami macierzy A i B. Udowodnić, że rząd macierzy (A, B) może przyjmować dowolną wartość całkowitą z przedziału

$$[\ \max(a, b)\ ,\ \min(a + b, m)\ ]$$

dla odpowiednio dobranych macierzy A i B.

Zadanie 6 (z teorii). [10pt]

Niech W_1 i W_2 będą podprzestrzeniami liniowymi w przestrzeni liniowej V. Załóżmy, że $\dim(W_1) < \infty$ i $\dim(W_2) < \infty$. Udowodnić wzór

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)\,.$$

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL Kolokwium 1, 30 listopada 2017, **Temat B**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18pt]

a) Niech $z = -\sqrt{3} - i$. Dla jakiej liczby naturalniej $n \in [10, 20]$ mamy $\mathrm{Re}(z^n) > 0$?

b) Znaleźć wszystkie liczby $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ spełniające równanie

$$\frac{27|z|}{z} = \frac{1}{3}\bar{z}\, z^3 \,.$$

Zadanie 2. [18pt]

Niech $V_1 = \mathrm{lin}\{(2,1,1,1), (3,1,0,2), (1,1,2,0)\}$ oraz V_2 opisane układem równań

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} & & -3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ tx_1 & & & + & x_3 & & & = & 0 \end{array} \right\}$$

będą podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^4$.

(a) Znaleźć wszystkie takie $t \in \mathbb{R}$, że $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$.

(b) Znaleźć bazę przestrzeni $V_1 + V_2$ w zależności od $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6×3 pt]:

1. Liczba zespolona $1 + 2i$ jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$ stopnia 8 o wyrazach rzeczywistych. Czy wszystkie pozostałe pierwiastki mogą być rzeczywiste?

2. Czy wektory $\alpha = (0,1,1)$, $\beta = (1,0,1)$, $\gamma = (1,1,0) \in (\mathbb{Z}_2)^3$ są liniowo zależne?

3. Czy jest prawdą, że istnieje taka baza $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n, \alpha_4$ przestrzeni liniowej $\mathbb{K}^4$, że $a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_{i4} = 0$ dla każdego $i = 1, 2, 3, 4$, gdzie $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})$ dla $i = 1, 2, 3, 4$?

4. Macierze $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$. Czy jest prawdą, że $r(A_i) = 3$ dla każdego i ?

5. Załóżmy, że macierz B powstała poprzez skreślenie pewnej liczby wierszy i kolumn macierzy A. Czy rząd macierzy B może być większy od rzędu macierzy A?

6. Czy istnieją takie podprzestrzenie V_1 i V_2 przestrzeni $\mathbb{R}^7$, że $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$ oraz $\dim V_1 = \dim V_2 = 5$?

GAL Kolokwium 1, część 2, 30 listopada 2017, **Temat B**

Zadanie 4. [18pt]

Niech $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + x_2, 2x_2 + x_3, x_3 + x_4)$.

a) Znaleźć podprzestrzeń liniową $U \subset \mathbb{R}^4$ taką, że $\mathbb{R}^4 = \ker(f) \bigoplus U$.

b) Czy istnieje przekształcenie liniowe $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$\ker(g) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\,,\ x_2 - x_3 - x_4 = 0\,\}$$

oraz wektor $(2, 1, 1)$ należy do obrazu g. Jeśli istnieje takie przekształcenie, to podać jego wzór.

Zadanie 5. [18pt]

Dane są macierze rozmiaru $m \times n$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Niech $V \subset \mathbb{K}^n$ będzie przestrzenią rozwiązań układu jednorodnego zadanego przez macierz A

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0\,, \quad i = 1, 2, \dots, m\,,$$

a $W \subset \mathbb{K}^n$ niech będzie przestrzenią rozwiązań układu jednorodnego zadanego przez macierz B

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = 0\,, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Definiujemy macierze $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ rozmiaru $2m \times n$ oraz (A, B) rozmiaru $m \times 2n$.

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (A, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

a) Czy znając $\dim V$, $\dim W$, $\dim(V + W)$ można wyznaczyć rząd macierzy $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$?

b) Czy znając $\dim V$, $\dim W$, $\dim(V + W)$ można wyznaczyć rząd macierzy (A, B)?

c) Niech $a = r(A)$ i $b = r(B)$ będą rzędami macierzy A i B. Udowodnić, że rząd macierzy (A, B) może przyjmować dowolną wartość całkowitą z przedziału

$$[\ \max(a, b)\ ,\ \min(a + b, m)\ ]$$

dla odpowiednio dobranych macierzy A i B.

Zadanie 6 (z teorii). [10pt]

Niech W_1 i W_2 będą podprzestrzeniami liniowymi w przestrzeni liniowej V. Załóżmy, że $\dim(W_1) < \infty$ i $\dim(W_2) < \infty$. Udowodnić wzór

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)\,.$$