GAL I, Kolokwium 2 TEMAT **A** 25.01.2016

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. [18 punktów]

   Niech $\alpha_1 = (1,1,1,1), \alpha_2 = (1,1,1,0), \alpha_3 = (1,1,0,0), \alpha_4 = (1,0,0,0)$, niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ i niech $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym spełniającym $\ker(\varphi) = \operatorname{lin}(\alpha_1, \alpha_4)$, $\varphi(\alpha_2) = \alpha_1$, $\varphi(\alpha_3) = \alpha_2$. Znaleźć:

   (a) $M(\varphi)_{st}^{st}$

   (b) $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$

   (c) rząd przekształcenia $\varphi^k = \varphi \circ \ldots \circ \varphi$ (k-krotne złożenie) dla $k = 1,2,3$.

2. [18 punktów]

   Dane są: baza $\mathcal{A} = \{(1,2,4),(1,1,1),(0,0,1)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, bazy $\mathcal{B} = \{(0,1),(1,1)\}, \mathcal{C} = \{(1,2),(1,3)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ oraz przekształcenia liniowe $\varphi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem $\varphi_1((x_1,x_2,x_3)) =$
   $= (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$ oraz $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane warunkiem $M(\varphi_2)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a) Obliczyć $M(\varphi_2 \circ \varphi_1)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$

   (b) Czy istnieją bazy $\mathcal{B}'$ oraz $\mathcal{C}'$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ takie, że $M(\varphi_2)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$?

   (c) Niech $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem liniowym danym wzorem $\psi((y_1,y_2)) = y_1 + 2y_2$. Znaleźć współrzędne funkcjonału $\varphi_1^*(\psi)$ w bazie sprzężonej do bazy $\mathcal{A}$.

3. [10 punktów]

   Niech $A \in M_{m\times n}(K)$ będzie macierzą o wierszach $w_1, \ldots, w_m$. Niech $r = \dim \operatorname{lin}(w_1, \ldots, w_m)$ i niech $k = \max\{s \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid A \text{ zawiera podmacierz } s \times s \text{ o niezerowym wyznaczniku}\}$. Wykazać, że $r = k$.

GAL I, Kolokwium 2 TEMAT **A** 25.01.2016

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązania zadań 4 i 6 TRZEBA napisać na oddzielnych kartkach. Kartka z treścią zadań może być użyta do wpisania rozwiązań zadania 5.

Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

4. [18 punktów]

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Obliczyć $\det A$.

(b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierz B jest odwracalna?

5. [każde pytanie za 3 punkty]

(a) V, W są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Czy dla każdego układu wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ rozpinającego przestrzeń V i każdego układu wektorów $\beta_1, \dots, \beta_k$ przestrzeni W istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$ takie, że $\varphi(\alpha_j) = \beta_j$ dla każdego $j = 1, \dots, k$?

(b) Przekształcenia liniowe $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ i $\psi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ spełniają $r(\varphi) = 4 = r(\psi)$. Czy wynika stąd, że przekształcenie $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ jest izomorfizmem?

(c) Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru 3. Dane są dwa liniowo niezależne funkcjonały liniowe $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$. Czy musi istnieć niezerowy wektor $\alpha \in V$ taki, że $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha) = 0$?

(d) Macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są odwracalne. Czy wynika stąd, że macierz $A \cdot B$ jest odwracalna?

(e) Dana jest macierz $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ spełniająca $\det(A+A) = \det(A)+\det(A)$. Czy musi zachodzić: $\det(A) = 0$?

(f) Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ma w każdym wierszu dokładnie jeden niezerowy element, równy x i w każdej kolumnie dokładnie jeden niezerowy element. Ile wynosi $|\det(A)|$?

6. [18 punktów]

Dane są macierze $A, B \in M_{m\times n}(K)$ rzędu k.

(a) Udowodnić, że istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : K^n \to K^m$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ przestrzeni K^n i bazy $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ przestrzeni K^m takie, że $A = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ oraz $B = M(\varphi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'}$?

(b) Czy w (a) zawsze można wymagać, aby $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$?

Czyli: Czy muszą istnieć przekształcenie liniowe $\varphi : K^n \to K^m$, baza $\mathcal{A}$ przestrzeni K^n i bazy $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ przestrzeni K^m takie, że $A = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ oraz $B = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}'}$?

GAL I, Kolokwium 2 TEMAT **B** 25.01.2016

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. [18 punktów]

   Niech $\alpha_1 = (1,1,1,1), \alpha_2 = (1,1,1,0), \alpha_3 = (1,1,0,0), \alpha_4 = (1,0,0,0)$, niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ i niech $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym spełniającym $\ker(\varphi) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\varphi(\alpha_3) = \alpha_2$, $\varphi(\alpha_4) = \alpha_3$. Znaleźć:

   (a) $M(\varphi)_{st}^{st}$

   (b) $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$

   (c) rząd przekształcenia $\varphi^k = \varphi \circ \ldots \circ \varphi$ (k-krotne złożenie) dla $k = 1, 2, 3$.

2. [18 punktów]

   Dane są: baza $\mathcal{A} = \{(1,1,2), (1,2,1), (0,1,0)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, bazy $\mathcal{B} = \{(1,1), (1,0)\}, \mathcal{C} = \{(1,3), (1,2)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ oraz przekształcenia liniowe $\varphi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem $\varphi_1((x_1, x_2, x_3)) =$
   $= (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$ oraz $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane warunkiem $M(\varphi_2)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Obliczyć $M(\varphi_2 \circ \varphi_1)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$

   (b) Czy istnieją bazy $\mathcal{B}'$ oraz $\mathcal{C}'$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ takie, że $M(\varphi_2)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$?

   (c) Niech $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem liniowym danym wzorem $\psi((y_1, y_2)) = y_1 + 2y_2$. Znaleźć współrzędne funkcjonału $\varphi_1^*(\psi)$ w bazie sprzężonej do bazy $\mathcal{A}$.

3. [10 punktów]

   Niech $A \in M_{m\times n}(K)$ będzie macierzą o wierszach $w_1, \ldots, w_m$. Niech $r = \dim \mathrm{lin}(w_1, \ldots, w_m)$ i niech $k = \max\{s \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid A \text{ zawiera podmacierz } s \times s \text{ o niezerowym wyznaczniku}\}$. Wykazać, że $r = k$.

GAL I, Kolokwium 2 TEMAT **B** 25.01.2016

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązania zadań 4 i 6 TRZEBA napisać na oddzielnych kartkach. Kartka z treścią zadań może być użyta do wpisania rozwiązań zadania 5.

Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

4. [18 punktów]

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Obliczyć $\det A$.

(b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierz B jest odwracalna?

5. [każde pytanie za 3 punkty]

(a) V, W są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Czy dla każdego układu wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ rozpinającego przestrzeń V i każdego układu wektorów $\beta_1, \dots, \beta_k$ przestrzeni W istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$ takie, że $\varphi(\alpha_j) = \beta_j$ dla każdego $j = 1, \dots, k$?

(b) Przekształcenia liniowe $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ i $\psi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ spełniają $r(\varphi) = 4 = r(\psi)$. Czy wynika stąd, że przekształcenie $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ jest izomorfizmem?

(c) Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru 3. Dane są dwa liniowo niezależne funkcjonały liniowe $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$. Czy musi istnieć niezerowy wektor $\alpha \in V$ taki, że $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha) = 0$?

(d) Macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są odwracalne. Czy wynika stąd, że macierz $A \cdot B$ jest odwracalna?

(e) Dana jest macierz $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ spełniająca $\det(A+A) = \det(A)+\det(A)$. Czy musi zachodzić: $\det(A) = 0$?

(f) Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ma w każdym wierszu dokładnie jeden niezerowy element, równy x i w każdej kolumnie dokładnie jeden niezerowy element. Ile wynosi $|\det(A)|$?

6. [18 punktów]

Dane są macierze $A, B \in M_{m\times n}(K)$ rzędu k.

(a) Udowodnić, że istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : K^n \to K^m$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ przestrzeni K^n i bazy $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ przestrzeni K^m takie, że $A = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ oraz $B = M(\varphi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'}$?

(b) Czy w (a) zawsze można wymagać, aby $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$?

Czyli: Czy muszą istnieć przekształcenie liniowe $\varphi : K^n \to K^m$, baza $\mathcal{A}$ przestrzeni K^n i bazy $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ przestrzeni K^m takie, że $A = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ oraz $B = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}'}$?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n + b_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 - b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 - b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & & \\ . & . & . & \dots & . & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 - b_n \end{bmatrix}$$