GAL, Kolokwium 2 TEMAT **A** 23.01.~~2014~~ 2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. [18 punktów]

   Dla $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\varphi_t : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem $\varphi_t((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) = (x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5, 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5, 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + tx_4 + 5x_5)$.

   (a) Znaleźć bazę przestrzeni $\ker(\varphi_1)$ oraz znaleźć wymiar przestrzeni $\operatorname{im}(\varphi_1)$.

   (b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie φ_t jest epimorfizmem?

2. [18 punktów]

   Dane są: baza $\mathcal{A} = \{(1, 2, 3), (1, 2, 2), (1, 1, 2)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, baza $\mathcal{B} = \{(0, 1), (1, 1)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, baza $\mathcal{C} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ oraz przekształcenia liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $M(\eta)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

   (a) Znaleźć wzór na φ.

   (b) Niech wektor $\alpha \in \mathbb{R}^3$ ma w bazie $\mathcal{A}$ współrzędne 1,1,1. Ile wynoszą współrzędne wektora $(\psi \circ \varphi)(\alpha)$ w bazie $\mathcal{C}$?

   (c) Znaleźć taką bazę $\mathcal{D}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, że $M(\eta)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = I$.

3. [10 punktów]

   Niech V, W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wykazać, że:

$$\dim \ker(\varphi) + \dim \operatorname{im}(\varphi) = \dim V$$

2015

GAL, Kolokwium 2 TEMAT **A** 23.01.~~2014~~

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązania zadań 5 i 6 TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach. Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

4. [każde pytanie za 3 punkty]

   (a) W $\mathbb{R}^n$ dane są dwie podprzestrzenie V_1, V_2 obie wymiaru wymiaru $n-1$ oraz wektory $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^n$ takie, że $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \operatorname{lin}(\alpha_1)$ i $\mathbb{R}^n = V_2 \oplus \operatorname{lin}(\alpha_2)$. Załóżmy, że $V_1 \neq V_2$. Czy wynika stąd, że $\alpha_1 \neq \alpha_2$?

   (b) V, W są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K, Z jest podprzestrzenią przestrzeni V, przy czym $\dim V = 10$, $\dim Z = 9$. Dane są dwa wektory $\alpha_0 \in V, \alpha_0 \notin Z$ oraz $\beta_0 \in W$. Ile jest przekształceń liniowych $\varphi : V \to W$ takich, że $\varphi(\alpha_0) = \beta_0$ i równocześnie $\ker \varphi = Z$?

   (c) Czy dla każdej macierzy odwracalnej $P \in M_{n\times n}(K)$ istnieją bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni K^n takie, że $P = M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$?

   (d) $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ będzie bazą przestrzeni V i niech $\mathcal{A}^* = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ będzie sprzężoną do $\mathcal{A}$ bazą przestrzeni V^*. Ile wynosi $\psi_2(\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3)$?

(e) Czy każda macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ jest iloczynem macierzy operacji elementarnych?

(f) Czy dla każdych macierzy $A \in M_{5\times 4}(K), B \in M_{4\times 5}(K)$ macierz $A \cdot B \in M_{5\times 5}(K)$ ma wyznacznik równy 0?

5. [18 punktów]

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Obliczyć $\det A$.

b) Niech $C = [c_{ij}]$ będzie macierzą odwrotną do B. Obliczyć c_{11}.

6. [18 punktów]

Dane jest przekształcenie liniowe $\varphi : V \to V$. Wykazać, że istnieją podprzestrzenie $V_1, V_2 \subset V$ oraz izomorfizm $\psi_1 : V \to V$ takie, że $\varphi = \psi_2 \circ \psi_1$, gdzie $\psi_2 : V \to V$ jest rzutem na V_1 wzdłuż V_2.