GAL Kolokwium 2, 24 stycznia 2014 **Zestaw A**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zadanie 1
(a) Znaleźć wzór na przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *takie, że* $\varphi(1,2,2) = (1,0,1,2)$ *oraz* $\ker\varphi = \mathrm{lin}((1,1,3),(1,2,1)$.
(b) Niech $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(2,2,3),(3,4,4)\}$ *i* $\mathcal{B} = \{(1,2),(1,-1)\}$ *będą odpowiednio bazami* $\mathbb{R}^3$ *i* $\mathbb{R}^2$. *Niech* $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *będzie takim przekształceniem liniowym, że* $M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
Znaleźć wzór na ψ *i macierz* ψ *w bazie standardowej.*

Zadanie 2 *Niech* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *i* $\psi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *będą przekształceniami liniowymi zadanymi wzorami* $\varphi(x_1,x_2,x_3) = (3x_1 + 2x_2 - 4x_3,\ x_1 + x_2 - 2x_3)$
i $\psi_t(x_1,x_2) = (x_1 + tx_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 + 2x_2)$.

(a) Zbadać, dla jakich wartości parametru t *przekształcenie* $\varphi \circ \psi_t$ *jest izomorfizmem.*
(b) Zbadać, dla jakich wartości parametru t *przekształcenie* $\varphi \circ \psi_t$ *jest symetrią.*
(c) Zbadać, dla jakich wartości parametru t *przekształcenie* $\psi_t \circ \varphi$ *jest izomorfizmem.*

Zadanie 3
(a) Niech $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (3,1,4)$, $\alpha_3 = (1,4,0)$ *oraz niech* $\mathcal{A} = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ *oznacza bazę przestrzeni* $\mathbb{R}^3$. *Znaleźć współrzędne funkcjonału* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *danego wzorem* $f(x_1,x_2,x_3) = -3x_1 + x_2 + x_3$ *w bazie* $\mathcal{A}^\star$.

(b) Niech $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *będzie dane wzorem:*
$\psi(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + 3x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + x_3,\ 2x_1 + 5x_2 - x_3)$. *Znaleźć bazy obrazu i jądra przekształcenia sprzężonego* $\psi^\star$. *Funkcjonały znalezionych baz podać wzorami.*

Zadanie 4 *Niech* $A_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 5 & t & 1 \\ 1 & 2 & t & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Obliczyć wyznacznik macierzy A_t.
(b) Zbadać dla jakich wartości parametru t *rząd macierzy* A_t *jest równy 4.*
(c) Uzasadnić, że macierz A_5 *jest odwracalna, ale nie wszystkie jej współczynniki są całkowite.*

Zadanie 5 *Niech* W *i* U *będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni* V.

(a) Niech $\pi_1, \pi_2 \in L(V;V)$ *spełniają warunki:* $\pi_1(W) = U$ *i* $\pi_2(U) = W$.
Udowodnić, że $\dim W = \dim U$.

(b) Niech $\dim W \geq \dim U$. *Udowodnić, że istnieje rzut* $\pi \in L(V;V)$ *taki, że* $\pi(W) = U$.

Teoria 6
a) Podać definicję macierzy przekształcenia liniowego w zadanych bazach.
b) Sformułować twierdzenie Laplace'a o rozwijaniu wyznaczników względem wierszy i kolumn.
c) Udowodnić, że jeżeli V *i* W *są przestrzeniami liniowymi, skończonego wymiaru nad ciałem* K *i* $\varphi : V \to W$ *jest przekształceniem liniowym, to* $\dim V = \dim(\ker\varphi) + \dim(\mathrm{im}\,\varphi)$.

GAL Kolokwium 2, 24 stycznia 2014 **Zestaw B**

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
• Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zadanie 1
(a) Znaleźć wzór na przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *takie, że* $\varphi(3,2,1) = (1,0,2,1)$ *oraz* $\ker\varphi = \mathrm{lin}((3,1,1),(2,1,1)$.
(b) Niech $\mathcal{A} = \{(1,2,3),(1,2,4),(1,3,4)\}$ *i* $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-2)\}$ *będą odpowiednio bazami* $\mathbb{R}^3$ *i* $\mathbb{R}^2$*. Niech* $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *będzie takim przekształceniem liniowym, że* $M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
Znaleźć wzór na ψ *i macierz* ψ *w bazie standardowej.*

Zadanie 2 *Niech* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *i* $\psi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *będą przekształceniami liniowymi zadanymi wzorami* $\varphi(x_1,x_2,x_3) = (3x_1 - 3x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_3)$
i $\psi_t(x_1,x_2) = (2x_1 + tx_2,\ 3x_1 + 4x_2,\ 2x_1 + 3x_2)$.

(a) Zbadać, dla jakich wartości parametru t *przekształcenie* $\varphi \circ \psi_t$ *jest izomorfizmem.*
(b) Zbadać, dla jakich wartości parametru t *przekształcenie* $\varphi \circ \psi_t$ *jest symetrią.*
(c) Zbadać, dla jakich wartości parametru t *przekształcenie* $\psi_t \circ \varphi$ *jest izomorfizmem.*

Zadanie 3
(a) Niech $\alpha_1 = (1,3,1)$, $\alpha_2 = (1,1,4)$, $\alpha_3 = (1,4,0)$ *oraz niech* $\mathcal{A} = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ *oznacza bazę przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*. Znaleźć współrzędne funkcjonału* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *danego wzorem* $f(x_1,x_2,x_3) = -3x_1 + x_2 + x_3$ *w bazie* $\mathcal{A}^\star$.

(b) Niech $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *będzie dane wzorem:*
$\psi(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 + x_3,\ 3x_1 + x_2 + 2x_3,\ x_1 + 3x_2 + 2x_3,\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3)$*. Znaleźć bazy obrazu i jądra przekształcenia sprzężonego* $\psi^\star$*. Funkcjonały znalezionych baz podać wzorami.*

Zadanie 4 *Niech* $A_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & t \\ 3 & 5 & t & 1 \\ 1 & 2 & t & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Obliczyć wyznacznik macierzy A_t.
(b) Zbadać dla jakich wartości parametru t *rząd macierzy* A_t *jest równy 4.*
(c) Uzasadnić, że macierz A_5 *jest odwracalna, ale nie wszystkie jej współczynniki są całkowite.*

Zadanie 5 *Niech* W *i* U *będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni* V.

(a) Niech $\pi_1, \pi_2 \in L(V;V)$ *spełniają warunki:* $\pi_1(W) = U$ *i* $\pi_2(U) = W$.
Udowodnić, że $\dim W = \dim U$.

(b) Niech $\dim W \geq \dim U$*. Udowodnić, że istnieje rzut* $\pi \in L(V;V)$ *taki, że* $\pi(W) = U$.

Teoria 6
a) Podać definicję macierzy przekształcenia liniowego w zadanych bazach.
b) Sformułować twierdzenie Laplace'a o rozwijaniu wyznaczników względem wierszy i kolumn.
c) Udowodnić, że jeżeli V *i* W *są przestrzeniami liniowymi, skończonego wymiaru nad ciałem* K *i* $\varphi : V \to W$ *jest przekształceniem liniowym, to* $\dim V = \dim(\ker\varphi) + \dim(\mathrm{im}\,\varphi)$.