GAL, Kolokwium 1. Zestaw A

25 listopada 2013

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach. Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zadanie 1 *Niech* $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *będą określone wzorami:* $f(z) = 2iz^3 + i$ *oraz* $g(z) = 9z^2$. *Niech* $A = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0,\ Im(z) < 0\}$. *Naszkicuj na płaszczyźnie zespolonej zbiory:*

a) $f(A)$.

b) $g^{-1}(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid g(z) \in A\}$.

Zadanie 2

a) Znajdź wszystkie liczby zespolone spełniające równanie $z^4\,\overline{z} = 81|z|$.

b) Znajdź wszystkie pierwiastki zespolone wielomianu $x^6 - 2^6 \in \mathbb{C}[x]$ *i rozłóż ten wielomian na iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia* ≤ 2.

Zadanie 3 *Niech* $V = lin\{(2,3,-1,0), (1,1,0,1)\ (2,1,1,4)\}$ *i* $W = lin\{(2,3,3,4), (3,4,3,5)\ (1,1,1,2)\}$ *będą podprzestrzeniami* R^4

a) Opisz przestrzeń V *układem równań.*

b) Znajdź bazę przestrzeni $V + W$.

Zadanie 4 *Niech* $W_t \subset R^3$ *będzie przestrzenią opisaną układem równań:*

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + tx_3 = 0 \end{cases}$$

zaś $U_s = \mathrm{lin}\{(1,s,1),\ (3,9,s)\}$.

a) Znajdź wymiar W_t *w zależności od parametru* t.

b) Zbadaj dla których wartości parametrów s *i* t *zachodzi* $\mathbb{R}^3 = W_t \oplus U_s$.

Zadanie 5 *Niech* V *będzie przestrzenią wymiaru skończonego nad ciałem* K.

a) Niech $m \geq 1$ *i układ* $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta\}$ *wektorów z przestrzeni* V *jest liniowo niezależny. Wykaż, że*

$$\dim(\,lin\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\} \cap lin\{\alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \beta, ..., \alpha_m + \beta\}) = m - 1.$$

b) Wykaż, że jeżeli W, U *są właściwymi podprzestrzeniami liniowymi* V *i* $V = W \oplus U$, *to istnieje podprzestrzeń* U' *przestrzeni* V *taka, że* $V = W \oplus U'$ *i* $U \neq U'$.

Teoria

a) Napisz definicję przestrzeni liniowej nad ciałem K.

b) Udowodnij, że w zbiorze niezerowych liczb zespolonych wykonalne jest dzielenie.

c) Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową wymiaru skończonego i $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ jest układem wektorów V . Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(1) Układ $\mathcal{B}$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V

(2) Układ $\mathcal{B}$ jest minimalnym układem rozpinającym V.

GAL, Kolokwium 1. Zestaw B

25 listopada 2013

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach. Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zadanie 1 *Niech* $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *będą określone wzorami:* $f(z) = -iz^3 + i$ *oraz* $g(z) = 4z^2$. *Niech* $A = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) < 0,\ Im(z) > 0\}$. *Naszkicuj na płaszczyźnie zespolonej zbiory:*

a) $f(A)$.

b) $g^{-1}(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid g(z) \in A\}$.

Zadanie 2

a) Znajdź wszystkie liczby zespolone spełniające równanie $z^4\,\overline{z} = 16|z|$.

b) Znajdź wszystkie pierwiastki zespolone wielomianu $x^6 - 3^6 \in \mathbb{C}[x]$ *i rozłóż ten wielomian na iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia* ≤ 2.

Zadanie 3 *Niech* $V = lin\{(2,-1,3,0), (1,0,1,1)\ (2,1,1,4)\}$
i $W = lin\{(2,3,3,4), (3,3,4,5)\ (1,1,1,2)\}$ *będą podprzestrzeniami* R^4

a) Opisz przestrzeń V *układem równań.*

b) Znajdź bazę przestrzeni $V + W$.

Zadanie 4 *Niech* $W_t \subset R^3$ *będzie przestrzenią opisaną układem równań:*

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + tx_3 = 0 \end{cases}$$

zaś $U_s = \mathrm{lin}\{(1,1,s),\ (2,s,4)\}$.

a) Znajdź wymiar W_t *w zależności od parametru* t.

b) Zbadaj dla których wartości parametrów s *i* t *zachodzi* $\mathbb{R}^3 = W_t \oplus U_s$.

Zadanie 5 *Niech* V *będzie przestrzenią wymiaru skończonego nad ciałem* K.

a) Niech $m \geq 1$ *i układ* $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta\}$ *wektorów z przestrzeni* V *jest liniowo niezależny. Wykaż, że*

$$\dim(\,lin\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\} \cap lin\{\alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \beta, ..., \alpha_m + \beta\}) = m - 1.$$

b) Wykaż, że jeżeli W, U *są właściwymi podprzestrzeniami liniowymi* V *i* $V = W \oplus U$, *to istnieje podprzestrzeń* U' *przestrzeni* V *taka, że* $V = W \oplus U'$ *i* $U \neq U'$.

Teoria

a) Napisz definicję przestrzeni liniowej nad ciałem K.

b) Udowodnij, że w zbiorze niezerowych liczb zespolonych wykonalne jest dzielenie.

c) Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową wymiaru skończonego i $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ jest układem wektorów V . Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(1) Układ $\mathcal{B}$ jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V

(2) Układ $\mathcal{B}$ jest minimalnym układem rozpinającym V.