GAL Kolokwium 2, 25 stycznia 2013

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zestaw A

Zadanie 1.
(a) Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym zadanym wzorem $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_2 - 2x_3, -x_2 - x_3)$. Znaleźć bazy $\ker \varphi$ oraz $\operatorname{im} \varphi$.

(b) Niech $\mathcal{A} = \{(1,1,1), (1,0,1), (0,1,1)\}$ i $\mathcal{B} = \{(1,1), (1,-1)\}$ będą odpowiednio bazami $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ i niech $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Znaleźć wzór na φ.

Zadanie 2. Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $\psi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi zadanymi wzorami $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + x_2 - x_3)$ i $\psi_t(x_1, x_2) = (tx_1 + x_2, -x_1, -x_1 + x_2)$.

(a) Znaleźć macierz w bazach standardowych izomorfizmu odwrotnego do $\varphi \circ \psi_3$.
(b) Zbadć dla jakich t przekształcenie $\varphi \circ \psi_t$ jest izomorfizmem.

Zadanie 3.
(a) Niech $\alpha_1 = (1,0,2)$, $\alpha_2 = (0,1,-1)$, $\alpha_3 = (1,2,1)$ oraz niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ oznacza bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Znaleźć współrzędne, w bazie $\mathcal{A}^\star$, funkcjonału $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ danego wzorem $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3$.
(b) Niech $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będzie dane wzorem $\psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, -x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 3x_3, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$. Znaleźć bazy obrazu i jądra przekształcenia sprzężonego $\psi^\star$.

Zadanie 4. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(a) Obliczyć wyznaczniki macierzy A i B.
(b) Obliczyć wyznacznik macierzy $A^4 B^{-6} A^T (3B)$.

Zadanie 5. Niech $n > 1$ i $P_{ij} = [p_{kl}] \in M_{n\times n}(K)$, gdzie $p_{kl} = 1$ dla $k = i, l = j$ i $p_{kl} = 0$ w pozostałych przypadkach.
(a) Obliczyć $P_{11}P_{12}$ oraz $P_{12}P_{11}$.

(b) Niech $f : M_{n\times n}(K) \to K$ jest takim funkcjonałem liniowym określonym na przestrzeni macierzy $M_{n\times n}(K)$, że dla każdej pary macierzy A i B zachodzi, $f(AB) = f(BA)$. Pokazać, że istnieje taki element $c \in K$ ciała K, że $f([a_{ij}]) = c(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$ dla każdej macierzy $[a_{ij}] \in M_{n\times n}(K)$.

Teoria.
1) Zdefiniować jądro przekształcenia liniowego i udowodnić, że jest podprzestrzenią.
2) Udowodnić, że złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.
3) Niech $A \in M_{n\times n}(K)$ będzie macierzą kwadratową. Dla $i = 1, 2, 3$ niech A_i będzie macierzą powstałą z A przez operację elementarną typu i.
   a) Opisać wyznacznik macierzy A_i w zależności od $\det A$ oraz operacji elementarnej typu i.
   b) Opisać rząd macierzy A_i w zależności od $r(A)$ i operacji elementarnej typu i .

GAL Kolokwium 2, 25 stycznia 2013

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zestaw B

Zadanie 1.
(a) Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym zadanym wzorem
$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, -2x_1 - x_2 + x_3, -x_1 - x_2)$. Znaleźć bazy $\ker \varphi$ oraz $\operatorname{im} \varphi$.

(b) Niech $\mathcal{A} = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ i $\mathcal{B} = \{(1, -1), (1, 1)\}$ będą odpowiednio bazami $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ i niech $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
Znaleźć wzór na φ.

Zadanie 2. Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $\psi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi zadanymi wzorami $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 2x_2)$ i $\psi_t(x_1, x_2) = (tx_1 + x_2, -x_1 - x_2, x_2)$.

(a) Znaleźć macierz w bazach standardowych izomorfizmu odwrotnego do $\varphi \circ \psi_1$.
(b) Zbadć dla jakich t przekształcenie $\varphi \circ \psi_t$ jest izomorfizmem.

Zadanie 3.
(a) Niech $\alpha_1 = (2, 0, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, -1)$, $\alpha_3 = (1, 2, 1)$ oraz niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ oznacza bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Znaleźć współrzędne, w bazie $\mathcal{A}^\star$, funkcjonału $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ danego wzorem
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3$.
(b) Niech $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będzie dane wzorem $\psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, -x_1 + 2x_2 + 4x_3, -x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_3)$. Znaleźć bazy obrazu i jądra przekształcenia sprzężonego $\psi^\star$.

Zadanie 4. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

(a) Obliczyć wyznaczniki macierzy A i B.
(b) Obliczyć wyznacznik macierzy $A^4 B^{-6} A^T (3B)$.

Zadanie 5. Niech $n > 1$ i $P_{ij} = [p_{kl}] \in M_{n \times n}(K)$, gdzie $p_{kl} = 1$ dla $k = i, l = j$ i $p_{kl} = 0$ w pozostałych przypadkach.
(a) Obliczyć $P_{11} P_{21}$ oraz $P_{21} P_{11}$.

(b) Niech $f : M_{n \times n}(K) \to K$ jest takim funkcjonałem liniowym określonym na przestrzeni macierzy $M_{n \times n}(K)$, że dla każdej pary macierzy A i B zachodzi, $f(AB) = f(BA)$. Pokazać, że istnieje taki element $c \in K$ ciała K, że $f([a_{ij}]) = c(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$ dla każdej macierzy $[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K)$.

Teoria.
1) Zdefiniować jądro przekształcenia liniowego i udowodnić, że jest podprzestrzenią.
2) Udowodnić, że złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.
3) Niech $A \in M_{n \times n}(K)$ będzie macierzą kwadratową. Dla $i = 1, 2, 3$ niech A_i będzie macierzą powstałą z A przez operację elementarną typu i.
   a) Opisać wyznacznik macierzy A_i w zależności od $\det A$ oraz operacji elementarnej typu i.
   b) Opisać rząd macierzy A_i w zależności od $r(A)$ i operacji elementarnej typu i .