GAL, Kolokwium 1. Zestaw B

23 listopada 2012

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach. Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE)
podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zadanie 1 *(punkty: 16)*
Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb spełniających warunki:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |\tfrac{z+5i}{z-3-4i}| > 1\} \qquad B = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; z^2 \in A\}.$$

Zadanie 2 *(punkty: 16)*
Niech $w(x) = x^4 + 16x^2 + 100$

a) Znajdź wszystkie liczby $z \in \mathbb{C}$ *spełniające:* $w(x) = 0$.

b) Zapisz $w(x)$ *jako iloczyn dwóch wielomianów stopnia 2 o współczynnikach rzeczywistych.*

Zadanie 3 *(punkty: 16)*
Niech $V = \mathrm{lin}\{(1,-2,1,1),(3,-4,2,3),(1,2,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^4$ *i niech* $W \subset \mathbb{R}^4$ *będzie przestrzenią rozwiązań układu równań:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Znajdź bazy przestrzeni V, W *i* $V \cap W$. *Bazę przestrzeni* $V \cap W$ *uzupełnij do bazy przestrzeni* $V + W$.

Zadanie 4 *(punkty: 16)*
Niech $V = \mathrm{lin}\{(1,2,3,4),(1,1,2,3),(1,4,5,6)\} \subset \mathbb{R}^4$

a) Policz wymiar V.

b) Znajdź takie podprzestrzenie $U, W \subset \mathbb{R}^4$ *by* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W = U \oplus V = W \oplus V$
lub wykaż, że takie podprzestrzenie nie istnieją.

Zadanie 5 *(punkty: 16)*
Niech V_1 *i* V_2 *będą* n *wymiarowymi podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej* V *(tzn.* $\dim V_1 = \dim V_2 = n, \dim V < \infty$*).*

a) Załóżmy, że układ $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ *jest bazą* V_1 *oraz układ* $\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$ *jest bazą* V_2. *Wykaż, że układ* $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n\}$ *jest bazą* $V_1 + V_2$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$.

b) Wykaż, że istnieje podprzestrzeń W *przestrzeni* V *taka, że* $V_1 \oplus W = V_2 \oplus W = V$.

Teoria.(punkty: 20)

a) Napisz definicję bazy przestrzeni liniowej.

b) Sformułuj twierdzenie (lemat) Steinitza o wymianie.

c) Udowodnij, że jeżeli V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem K to:

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$