# GAL, Kolokwium 1. Zestaw A

23 listopada 2012

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach. Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE ) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

**Zadanie 1** *(punkty: 16)*
*Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb spełniających warunki:*

$$A = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |\tfrac{z+10i}{z+8-6i}| > 1\} \qquad B = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ z^2 \in A\}.$$

**Zadanie 2** *(punkty: 16)*
*Niech* $w(x) = x^4 + 10x^2 + 169$
*a) Znajdź wszystkie liczby* $z \in \mathbb{C}$ *spełniające:* $w(x) = 0$.
*b) Zapisz* $w(x)$ *jako iloczyn dwóch wielomianów stopnia 2 o współczynnikach rzeczywistych.*

**Zadanie 3** *(punkty: 16)*
*Niech* $V = \text{lin}\{(1,1,1,1),(2,1,0,2),(1,2,3,1)\} \subset \mathbb{R}^4$ *i niech* $W \subset \mathbb{R}^4$ *będzie przestrzenią rozwiązań układu równań:*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

*Znajdź bazy przestrzeni* $V$*,* $W$ *oraz* $V \cap W$*. Bazę przestrzeni* $V \cap W$ *uzupełnij do bazy przestrzeni* $V + W$*.*

**Zadanie 4** *(punkty: 16)*
*Niech* $V = \text{lin}\{(1,2,3,4),(1,3,2,1),(2,8,2,-4)\} \subset \mathbb{R}^4$
*a) Policz wymiar* $V$*.*
*b) Znajdź takie podprzestrzenie* $U, W \subset \mathbb{R}^4$ *by* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W = U \oplus V = W \oplus V$
*lub wykaż, że takie podprzestrzenie nie istnieją.*

**Zadanie 5** *(punkty: 16)*
*Niech* $V_1$ *i* $V_2$ *będą* $n$ *wymiarowymi podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej* $V$ *(tzn.* $\dim V_1 = \dim V_2 = n, \dim V < \infty$*).*
*a) Załóżmy, że układ* $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ *jest bazą* $V_1$ *oraz układ* $\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$ *jest bazą* $V_2$*. Wykaż, że układ* $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n,\ \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n\}$ *jest bazą* $V_1 + V_2$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$*.*
*b) Wykaż, że istnieje podprzestrzeń* $W$ *przestrzeni* $V$ *taka, że* $V_1 \oplus W = V_2 \oplus W = V$*.*

**Teoria**.(punkty: 20)
a) Napisz definicję bazy przestrzeni liniowej.
b) Sformułuj twierdzenie (lemat) Steinitza o wymianie.
c) Udowodnij, że jeżeli $V_1$ i $V_2$ będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej $V$ nad ciałem $K$ to:

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$