GAL, Kolokwium 2 TEMAT **A** 20.01.2012

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dane są dwie podprzestrzenie $V_t = \mathrm{lin}((-1,2,1,0),(0,1,2,t-1))$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, oraz $W\colon \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

   (a) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^4 = V_t \oplus W$?

   (b) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie rzutem na W wzdłuż V_0. Podać przykład wektora $\alpha \in \mathbb{R}^4$ takiego, że $\alpha \notin W$ oraz $\varphi(\alpha) = (1,-1,1,1)$.

   (c) Czy istnieje baza $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ taka, że $\alpha_1 = (1,0,0,1)$, $\alpha_2 \in W$ oraz wektor $\beta = (2,1,-1,2)$ ma w tej bazie współrzędne $1,-1,0,0$? Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy. Jeśli nie, to uzasadnić dlaczego.

2. Dana jest baza $\mathcal{A}\colon (1,1,1),(1,0,1),(1,0,0)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz baza $\mathcal{B}\colon (1,1),(2,1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ i $\psi_t\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (gdzie $t \in \mathbb{R}$) będą przekształceniami liniowymi takimi, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $M(\psi_t)_{\mathcal{S}t}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & t \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, gdzie $\mathcal{S}t$ jest bazą standardową $\mathbb{R}^2$.

   (a) Znaleźć bazę $Ker(\varphi)$ oraz wymiar przestrzeni $Im(\varphi)$.

   (b) Znaleźć wektor $(\varphi \circ \psi_1)((1,4))$.

   (c) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, przekształcenie $\varphi \circ \psi_t$ jest izomorfizmem liniowym?

3. Niech $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ oraz $A_2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   (a) Obliczyć $\det A_1$.

   (b) Niech $n = 15$. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ macierz A_2 jest odwracalna?

4. Dane są przestrzenie liniowe V, W, U (które mogą być nieskończenie wymiarowe) oraz przekształcenia liniowe $\varphi\colon V \longrightarrow W$ i $\psi\colon W \longrightarrow U$.

   (a) Udowodnić, że $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$, gdzie $\varphi^*\colon W^* \longrightarrow V^*$ i $\psi^*\colon U^* \longrightarrow W^*$ są przekształceniami sprzężonymi do φ i ψ, odpowiednio.

   (b) Udowodnić, że jeśli $\varphi^*\colon W^* \longrightarrow V^*$ jest epimorfizmem, to φ jest monomorfizmem.

verte $\longrightarrow$

5. Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni V.

   (a) Udowodnić, że $V_1 + V_2$ też jest podprzestrzenią V.

   (b) Udowodnić, że $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

6. Macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ nazywamy macierzą cykliczną wtedy i tylko wtedy gdy $A = a_1 I + a_2 C + a_3 C^2 + \dots a_n C^{n-1}$ dla pewnych $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$, gdzie $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K)$.

   (a) Udowodnić, że jeśli macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są cykliczne, to $AB = BA$.

   (b) Udowodnić, że jeśli $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są cykliczne, to ich iloczyn AB też jest macierzą cykliczną.

GAL, Kolokwium 2 TEMAT **B** 20.01.2012

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dane są dwie podprzestrzenie $V_t = \text{lin}\,((1,1,2,-2),(0,2,1,t))$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, oraz $W\colon \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

   (a) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^4 = V_t \oplus W$?

   (b) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie rzutem na W wzdłuż V_0. Podać przykład wektora $\alpha \in \mathbb{R}^4$ takiego, że $\alpha \notin W$ oraz $\varphi(\alpha) = (1,1,1,-1)$.

   (c) Czy istnieje baza $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ taka, że $\alpha_1 = (1,0,0,-1)$, $\alpha_2 \in W$ oraz wektor $\beta = (1,2,2,-1)$ ma w tej bazie współrzędne $1,-1,0,0$? Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy. Jeśli nie, to uzasadnić dlaczego.

2. Dana jest baza $\mathcal{A}\colon (0,0,1),(1,0,1),(1,1,1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz baza $\mathcal{B}\colon (1,2),(1,1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ i $\psi_t\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (gdzie $t \in \mathbb{R}$) będą przekształceniami liniowymi takimi, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $M(\psi_t)_{\mathcal{S}t}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & t \end{pmatrix}$, gdzie $\mathcal{S}t$ jest bazą standardową $\mathbb{R}^2$.

   (a) Znaleźć bazę $Ker(\varphi)$ oraz wymiar przestrzeni $Im(\varphi)$.

   (b) Znaleźć współrzędne wektora $(\varphi \circ \psi_1)((2,1))$ w bazie $\mathcal{B}$.

   (c) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, przekształcenie $\varphi \circ \psi_t$ jest izomorfizmem liniowym?

3. Niech $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ oraz $A_2 = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   (a) Obliczyć $\det A_1$.

   (b) Niech $n = 20$. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ macierz A_2 jest odwracalna?

4. Dane są przestrzenie liniowe V, W, U (które mogą być nieskończenie wymiarowe) oraz przekształcenia liniowe $\varphi\colon V \longrightarrow W$ i $\psi\colon W \longrightarrow U$.

   (a) Udowodnić, że $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$, gdzie $\varphi^*\colon W^* \longrightarrow V^*$ i $\psi^*\colon U^* \longrightarrow W^*$ są przekształceniami sprzężonymi do φ i ψ, odpowiednio.

   (b) Udowodnić, że jeśli $\varphi^*\colon W^* \longrightarrow V^*$ jest epimorfizmem, to φ jest monomorfizmem.

verte $\longrightarrow$

5. Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni V.

   (a) Udowodnić, że $V_1 + V_2$ też jest podprzestrzenią V.

   (b) Udowodnić, że $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

6. Macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ nazywamy macierzą cykliczną wtedy i tylko wtedy gdy $A = a_1 I + a_2 C + a_3 C^2 + \dots a_n C^{n-1}$ dla pewnych $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$, gdzie $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K)$.

   (a) Udowodnić, że jeśli macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są cykliczne, to $AB = BA$.

   (b) Udowodnić, że jeśli $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są cykliczne, to ich iloczyn AB też jest macierzą cykliczną.